

Олимпиада по математике «Миссия выполнима. Твоё призвание — финансист!»

10 класс, 2019 год

1. Даны первые 2025 членов арифметической прогрессии. Коля посчитал среднее арифметическое для всех пар членов последовательности. Затем он выписал получившиеся результаты, упорядочив их по возрастанию и исключив повторы. Например, из набора чисел 4, 2, 9, 9, 9, 5, 4 Коля бы выписал числа 2, 4, 5, 9.

- а) Докажите, что полученная последовательность также является арифметической прогрессией.
- б) Сколько чисел выписал Коля?

2. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 2026, а при делении на 2019 дает остаток 2009.

3. Двое бросают монету. Первый бросил ее 2018 раз, а второй 2019 раз. Предполагается, что монета симметричная, т. е. выпадение орла и решки при бросании равновероятно. Какова вероятность, что у второго монета упала орлом вверх большее число раз, чем у первого?

4. Какое из чисел больше: число 2019 или число

$$a^{a^{a^{\dots^a}}} \} 2019 \text{ раз,}$$

где $a = \sqrt[2019]{2019}$?

5. Квадратный лист бумаги со стороной $5\sqrt{2} - 5$ сложили, как показано на рисунке 1, получив новый квадрат. Полученный квадрат снова таким же образом сложили (рис. 2) и получили третий квадрат.

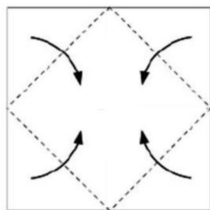


Рис. 1

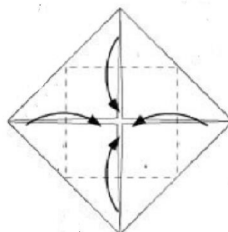


Рис. 2

Подобную операцию проделали еще четыре раза. Полученный седьмой квадрат полностью развернули до первоначального квадрата. Чему равна длина линий изгибов на развернутом квадрате?

6. Пусть $p(x)$ — такой многочлен с целыми коэффициентами, что $p(7) = 6$. Может ли число $p(2019)$ быть полным квадратом?

7. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором $CD = 6$, $BC = 4$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle BCD = 60^\circ$, $AB = AD$. Найдите длину диагонали AC .

8. В фойе банка по кругу расставлены n стульев. На эти стулья хотят сесть n посетителей. Первый посетитель выбирает свой стул произвольно. Затем $(k + 1)$ -й посетитель садится на k -ое место справа от k -го посетителя (для $1 \leq k \leq n - 1$). Никакой стул не может быть занят более, чем одним посетителем. Чему может быть равно n , если известно, что на каждом стуле в итоге оказался ровно один человек? Найдите все варианты.