

# Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2024 год

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых шести подряд идущих натуральных чисел?

072

2. Пусть  $A = 11111$ . Найдите остаток от деления числа

$$(2023 \cdot A - 1)^{2024} + (2024 \cdot A + 1)^{2023}$$

на число 123454321. Ответ обоснуйте.

2

3. Докажите неравенство

$$\log_2 \left( 1 + \frac{1}{2023} \right) + \log_2 \left( 2 - \frac{1}{2024} \right) > 1 + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}.$$

4. Известно, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 3y^2 - x + y = 6, \\ -4xy - x - y = 2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ . Найдите сумму

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4.$$

312

5. Сравните числа

$$(\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \operatorname{tg} 44^\circ) \quad \text{и} \quad 22.$$

$(\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \operatorname{tg} 44^\circ) > 22$

6. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , решениями которой были бы все такие пары целых чисел  $(x, y)$ , которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} y \leq 1000 - x^2, \\ y \geq x^2. \end{cases}$$

Других решений у системы быть не должно.

Замечание. Уравнения системы должны быть компактными выражениями (без знаков суммирования, троеточий и т. п.), в записи которых, помимо чисел и собственно неизвестных  $x$  и  $y$ , разрешается использовать скобки, знак  $=$ , стандартные арифметические операции и элементарные функции из школьной программы.

$\begin{cases} 0 = (\sqrt{x^2 - 1000} + 1) \sin(x) \\ 0 = (\sqrt{x^2 - 1000} + 1) \cos(x) \end{cases}$	Пример системы:
--	-----------------

7. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой  $m$ . Он знает, что от границы леса (прямой  $m$ ) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более  $4\sqrt{3}$  км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.

