

Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2024 год

1. На какое самое большое натуральное число будет гарантированно делиться произведение любых пяти подряд идущих натуральных чисел?

071

2. В восьмеричной системе счисления запись натурального числа состоит только из единиц. Какие остатки от деления на 9 в десятичной системе счисления может иметь это число? Ответ обоснуйте.

1 или 0

3. На боковой стороне AB трапеции $ABCD$, с основаниями $BC = 3$ и $AD = 7$, отмечены 11 точек K_1, K_2, \dots, K_{11} , разбивающие сторону AB на 12 равных отрезков, то есть

$$AK_1 = K_1K_2 = \dots = K_{10}K_{11} = K_{11}B.$$

Затем через точки K_1, K_2, \dots, K_{11} провели прямые, параллельные основаниям трапеции. Эти прямые пересекли сторону CD соответственно в точках T_1, T_2, \dots, T_{11} . Найдите сумму длин получившихся одиннадцати отрезков $K_1T_1, \dots, K_{11}T_{11}$.

99

4. Пусть $A = 1111$. Найдите остаток от деления числа

$$(A + 1)^{2024} + (A - 1)^{2024}$$

на число 1234321.

2

5. Известно, что система уравнений

$$\begin{cases} 9x^2 + 6xy + 3y^2 - 2x - y = 2, \\ 3x^2 + 6xy - x + y = -1/2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$. Найдите сумму

$$x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + x_4 + y_4.$$

6
8

6. Путник заблудился в лесу, который покрывает полуплоскость, ограниченную прямой m . Он знает, что от границы леса (прямой m) он находится на расстоянии 1 км, но не знает в каком направлении граница находится. Как путнику гарантированно выйти из леса, пройдя при этом не более $4\sqrt{3}$ км? Лес очень густой, и увидеть сквозь деревья опушку невозможно (как бы близко от нее он ни находился). Поэтому считается, что путник из леса вышел, если оказался на его границе.

