

# Межведомственная олимпиада по математике

9 класс, 2021 год

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т. п.)

1024

2. Отличные от нуля числа  $a$  и  $b$  являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - 5px + 2p^3 = 0.$$

Уравнение  $x^2 - ax + b = 0$  имеет единственный корень. Найдите  $p$ . Решение обоснуйте.

8

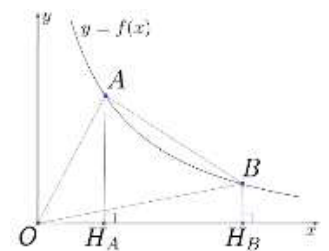
3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , чтобы ее решениями были **только** следующие три пары чисел:

$$x = y = 1, \quad x = y = 2, \quad x = 3, y = 4.$$

В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных  $x$  и  $y$ , разрешается использовать скобки, знак  $=$ , стандартные арифметические операции и элементарные функции.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (|1 - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - x|)(|2 - \sqrt{x}| + |\sqrt{x} - x|)(|1 - \sqrt{x}| + |1 - x|) \\ 0 &= (\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} - x)(1 - x) \end{aligned} \right\} \text{«дежидиде»}$$

4. Функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $(0, +\infty)$  и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек  $A$  и  $B$  на графике функции площади треугольника  $AOB$  и трапеции  $ABH_BH_A$  равны между собой ( $H_A, H_B$  — основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $B$  на ось абсцисс;  $O$  — начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте.



$$0 < \frac{x}{y} = (x)f$$

5. На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $E$  и  $F$  таким образом, что угол  $EAF$  равен  $45^\circ$ . Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника  $CEF$ . Решение обоснуйте.

2

6. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — наибольшие корни многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \quad \text{и} \quad g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

соответственно. Найдите  $\frac{x_1}{x_2}$ . Решение обоснуйте.

□ 30

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения

$$\sqrt{\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \dots}}}}$$

□ 37

8. Пусть  $A$  и  $B$  — некоторые числовые множества, а множество  $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$  представляет собой их сумму. (Другими словами, множество  $C$  состоит из всевозможных сумм элементов множеств  $A$  и  $B$ . Если, например,  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2\}$ , то  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ .) Известно, что  $C = \{0, 1, 2, \dots, 2^{2828}\}$ , а максимальный элемент множества  $A$  равен

$$\max A = (\sqrt{2} - 1)^{2020} + (\sqrt{2} + 1)^{2020}.$$

Докажите или опровергните следующие утверждения:

1. множество  $A$  и множество  $B$  содержат конечное число членов;
2. все элементы множеств  $A$  и  $B$  — целые числа;
3.  $\max B \geq 2$ .

□ Все утверждения верны