

# Межведомственная олимпиада по математике

## 10 класс, 2021 год

1. У Олега есть 550 рублей, и он хочет подарить маме на 8 Марта тюльпаны, причем непременно их должно быть нечётное число, и ни один оттенок цвета не должен повторяться. В магазине, куда пришел Олег, один тюльпан стоит 49 рублей, и есть в наличии цветы одиннадцати оттенков. Сколько существует способов у Олега подарить маме цветы? (Ответ в задаче должен быть компактным выражением, не содержащим знаков суммирования, многоточий и т. п.)

1024

2. Отличные от нуля числа  $a$  и  $b$  являются корнями квадратного уравнения

$$x^2 - 5px + 2p^3 = 0.$$

Уравнение  $x^2 - ax + b = 0$  имеет единственный корень. Найдите  $p$ .

8

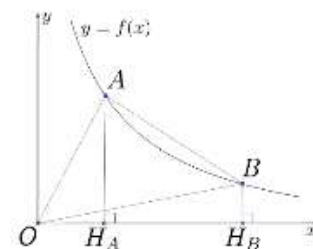
3. Придумайте какую-нибудь систему из двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ , чтобы ее решениями были **только** следующие три пары чисел:

$$x = y = 1, \quad x = y = 2, \quad x = 3, y = 4.$$

В записи уравнений системы, помимо чисел и собственно неизвестных  $x$  и  $y$ , разрешается использовать скобки, знак  $=$ , стандартные арифметические операции и элементарные функции.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (1 - x)(1 + |x|) + (1 - x)(1 + |x|) \\ 0 &= (x - 1)(x - 1)(1 - x) \end{aligned} \right\} \text{«двигатель»}$$

4. Функция  $y = f(x)$  определена на множестве  $(0, +\infty)$  и принимает на нем положительные значения. Известно, что для любых точек  $A$  и  $B$  на графике функции площади треугольника  $AOB$  и трапеции  $ABH_BH_A$  равны между собой ( $H_A, H_B$  — основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $B$  на ось абсцисс;  $O$  — начало координат). Найдите все такие функции. Решение обоснуйте. При условии  $f(1) = 4$  запишите в ответ число  $f(2)$ .



$$0 < \frac{x}{2} = (x)f$$

5. На сторонах  $BC$  и  $CD$  квадрата  $ABCD$  выбраны точки  $E$  и  $F$  таким образом, что угол  $EAF$  равен  $45^\circ$ . Длина стороны квадрата равна 1. Найдите периметр треугольника  $CEF$ .

2

6. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — наибольшие корни многочленов

$$f(x) = 1 - x - 4x^2 + x^4 \quad \text{и} \quad g(x) = 16 - 8x - 16x^2 + x^4$$

соответственно. Найдите  $\frac{x_1}{x_2}$ .

5.0

7. Вычислите с точностью до одной десятой значение выражения

$$\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + 41\sqrt{86 + \dots}}}$$

4.7

8. Известно, что число  $\cos 6^\circ$  является корнем уравнения

$$32t^5 - 40t^3 + 10t - \sqrt{3} = 0.$$

Найдите остальные четыре корня этого уравнения. (Ответы в задаче должны быть компактными выражениями, не содержащими знаков суммирования, многоточий и т. п.)

Остальные четыре корня имеют вид  $t = \cos \varphi$ , где  $\varphi \in \{78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ\}$