

## Межведомственная олимпиада по математике

10 класс, 2019 год

1. Действительные числа  $x, y, z$  удовлетворяют соотношениям:

$$4x^2 - 2x - 30yz = 25y^2 + 5y + 12xz = 9z^2 - 3z - 20xy.$$

Найдите все возможные тройки чисел  $(a, b, c)$ , где  $a = 2x + 5y$ ,  $b = 3z + 5y$ ,  $c = 3z - 2x$ .

$$(0 \text{ '1- '1-}) \text{ '1- '0 '1} \text{ '1 '1 '0} \text{ '0 '0 '0}$$

2. Найдите все такие функции  $f(x)$ , которые одновременно удовлетворяют трем условиям:

1.  $f(x) > 0$  для любого  $x > 0$ ;
2.  $f(1) = 1$ ;
3.  $f(a + b) \cdot (f(a) + f(b)) = 2f(a) \cdot f(b) + a^2 + b^2$  для любых  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$x = (x)f$$

3. В четырехугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $S_{ABO} = S_{CDO} = \frac{3}{2}$ ,  $BC = 3\sqrt{2}$ ,  $\cos \angle ADC = \frac{3}{\sqrt{10}}$ . Найдите синус угла между диагоналями этого четырехугольника, если его площадь принимает наименьшее возможное значение при данных условиях.

$$\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

4. В одной из клеток бесконечной клетчатой бумаги находится робот, которому могут быть отданы следующие команды:

- **вверх** (робот перемещается на соседнюю клетку сверху);
- **вниз** (робот перемещается на соседнюю клетку снизу);
- **влево** (робот перемещается на соседнюю клетку слева);
- **вправо** (робот перемещается на соседнюю клетку справа).

Если, например, робот выполнит последовательность из четырех команд (**вверх**, **вправо**, **вниз**, **влево**), то он, очевидно, вернется в исходное положение, т. е. окажется в той же клетке, из которой начал движение. Сколько существует всего различных последовательностей из 8 команд, возвращающих робота в исходное положение?

$$0067$$

5. Найдите все простые числа, десятичная запись которых имеет вид  $101010 \dots 101$  (единицы и нули чередуются).

$$101$$

6. Найдите какие-нибудь целые числа  $A$  и  $B$ , для которых выполняется неравенство

$$0,999 < A + B \cdot \sqrt{2} < 1.$$

Например,  $A = -3362, B = 2378$

7. Обыкновенная дробь  $\frac{1}{221}$  представлена в виде периодической десятичной дроби. Найдите длину периода. (Так, длина периода дроби  $\frac{25687}{99900} = 0,25712712712\dots = 0,25(712)$  равна 3.)

48

8. Аня с Борей играют в «морской бой» по следующим правилам: на окружности выбираются 29 различных точек, пронумерованных по часовой стрелке натуральными числами от 1 до 29. Аня рисует корабль — произвольный треугольник с вершинами в этих точках. Будем называть «выстрелом» выбор двух различных натуральных чисел  $k$  и  $m$  от 1 до 29. Если отрезок с концами в точках с номерами  $k$  и  $m$  имеет с треугольником Ани хотя бы одну общую точку, то корабль считается «раненым». Боря производит «залп» — несколько выстрелов одновременно. Аня нарисовала корабль и показала его Боре. И тут они заметили, что любой «залп» из  $K$  различных выстрелов **обязательно** ранит корабль Ани. Укажите какое-нибудь расположение корабля Ани, при котором значение  $K$  будет минимальным.

На 3 дугах описанной окружности лежат 8, 9 и 6 точек (не считая вершин корабля)