

Межведомственная олимпиада по математике

11 класс, 2017 год

1. Имеется 11 не обязательно различных натуральных чисел a_1, \dots, a_{11} . Докажите, что существуют целые числа c_1, \dots, c_{11} , $c_i \in \{-1, 0, 1\}$, не все равные нулю, такие, что число

$$c_1 a_1 + \dots + c_{11} a_{11}$$

делится нацело на 2047.

2. Известно, что уравнение

$$x^4 - 8x^3 + ax^2 + bx + 16 = 0$$

имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите a и b .

$$\boxed{28 - a = b = 2}$$

3. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N , делящееся нацело на n , сумма цифр которого равна n .

4. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов — А, В и С. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида А содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках В — 20% раствор и в С — 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Какое наименьшее количество переливаний надо сделать, чтобы получить в ёмкости 20,17% раствор? Какое наибольшее количество пробирок вида С может быть при этом использовано?

$$\boxed{\text{Минимум 1000 переливаний; максимум 73 пробирки вида С}}$$

5. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).

$$\boxed{5035485}$$

6. В первый день Дима выбирает два различных числа из множества $\{0, 1, 2, \dots, 2332\}$ и записывает их в тетрадь. На второй день он снова выбирает два различных числа из этого же множества и прибавляет каждое из выбранных чисел к каждому числу, уже имеющемуся в тетради. Потом он дописывает в тетрадь как сами выбранные числа, так и все получившиеся суммы. (Например, если в первый день выбрать 2 и 3, а во второй — 2 и 4, то в тетради будут записаны числа 2, 3, 2, 4, 4, 5, 6, 7.) При этом, если какая-либо сумма превосходит 2332, он заменяет ее остатком от деления на 2333. На третий день он опять выбирает два различных числа, прибавляет их ко всем числам в тетради, дописывает в тетрадь эти два числа и все получившиеся суммы и т. д. Через какое минимальное количество дней (как бы Дима числа ни выбирал) каждое из чисел $0, 1, 2, \dots, 2332$ будет гарантированно записано в тетради хотя бы один раз? Опишите все варианты, при которых Диме придётся ждать максимальное количество дней.

$$\boxed{N = 2332; \text{первые числа } a_1, a_2 \text{ произвольны, новые числа } b_1, b_2 \text{ такие, что } |a_1 - a_2| = |b_1 - b_2| > 0}$$

7. Про пятиугольник $ABCDE$ известно, что

$$AB = BC = CD = DE, \quad \angle B = 96^\circ, \quad \angle C = \angle D = 108^\circ.$$

Найдите $\angle E$.

1020

8. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия:

1. прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число;
2. прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число.

(Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 2, то получится таблица, изображенная на рисунке под словом «пример».) Можно ли, проделав некоторое количество указанных действий с таблицей А, получить таблицу В? Ответ обоснуйте.

Таблица А

1	0	0	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Таблица В

0	0	0	0	1
0	0	0	2	0
0	0	3	0	0
0	6	0	0	0
9	0	0	0	0

Пример

1	0	6	0	0
0	3	0	0	0
0	0	3	0	0
0	0	0	6	0
0	0	0	0	6

Нелзя