

## Московский физико-технический институт

### Письменный экзамен по математике, 2007 год, вариант 4

1. Решить уравнение

$$5\sqrt{1 + |x^2 - 1|} = 3 + |3 - 5x|.$$

$$\boxed{1 \leq x \leq \frac{6}{5} \vee x = -1}$$

2. Решить уравнение

$$3 + \cos 6x = 2 \frac{\sin 3x}{\cos 4x} - 4 \operatorname{tg}^2 4x.$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \wedge u\pi + \frac{\pi}{2} = x}$$

3. Решить неравенство

$$\frac{3}{\log_{\sqrt{1+x}}(1-x) + 4} \leq \log_{(x+1)^2} \frac{x+1}{(x-1)^2}.$$

$$\boxed{1 > x > \frac{7}{1-\sqrt{2}} \wedge 0 > x \geq \frac{7}{\sqrt{2}-1}}$$

4. В треугольнике  $ABC$  периметра 40 и площади 60 сторона  $BC$  равна 16. Внутри треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ , удалённая на расстояние 1 от прямой  $AB$  и на расстоянии 2 от прямой  $AC$ . Найти угол  $BAC$  и расстояние от  $D$  до центра вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

$$\boxed{\angle BAC = 2 \arctg \frac{4}{3} = \arcsin \frac{8}{5\sqrt{17}}, \frac{8}{17} \leq r \leq \frac{4}{5}}$$

5. Найти все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy - y^2 = 18, \\ x^2 + y^2 - 2x + 8y + 16 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{(8; -1) \vee (5; -1)}$$

6. В правильной четырёхугольной пирамиде  $SABCD$  ребро основания  $ABCD$  равно 1, а боковое ребро равно  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ . На ребре  $SB$  выбрана точка  $K$  так, что  $BK = 3KS$ . Сфера  $\omega$  с центром на отрезке  $DK$  проходит через точки  $S$  и  $C$ . Найти, в каком отношении центр сферы  $\omega$  делит отрезок  $DK$ , радиус сферы  $\omega$  и длину отрезка, который  $\omega$  отсекает от прямой  $CD$ .

$$\boxed{\frac{KO}{DO} = 2, R = \frac{\sqrt{21}}{11}, l = \frac{19}{12}}$$