

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2005 год, вариант 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9x^4 + 4x^2y = -3, \\ 9x^2y^2 + 4y^3 = -27. \end{cases}$$

$$\boxed{(9-1) \cdot (9-1)}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2}}{\cos x \cos 2x} + \frac{\sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2}}{\cos 2x \cos 3x} = \frac{2 \sin x \sin 2x}{\cos x \cos 3x} - \frac{1}{4 \cos 3x}.$$

$$\boxed{\frac{2}{3} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} = x}$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}{x - \frac{23}{32}}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} - \frac{1}{4}}.$$

$$\boxed{\frac{91}{91\sqrt{4+61}} > x \geq 1 \cdot \frac{1}{1} \geq x > \frac{91}{1}}$$

4. Найти стороны параллелограмма $ABCD$, в котором радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC и ABD , равны 5 и $\sqrt{13}$ соответственно, а расстояние между центрами этих окружностей равно 2.

$$\boxed{\frac{5}{2} \sqrt{6} = AD, 9 = AB}$$

5. Найти все пары действительных чисел $(x; y)$, для которых справедливо равенство

$$\log_{2\sqrt{y-x}} \left(2^{\sqrt{y-x}} - \sqrt{x\sqrt{y}-1} \right) = 3\sqrt{x+y-2\sqrt{y}}.$$

$$\boxed{\left(\frac{2}{9\sqrt{3}}, \frac{2}{1-9\sqrt{3}} \right)}$$

6. Сфера касается боковых граней четырёхугольной пирамиды $SABCD$ в точках, лежащих на рёбрах AB, BC, CD, DA . Известно, что высота пирамиды равна $2\sqrt{5}$, $AB = 6$, $SA = 5$, $SB = 7$, $SC = 2\sqrt{10}$. Найти длины рёбер BC и CD , радиус сферы и двугранный угол при ребре SD .

$$\boxed{R = 2\sqrt{\frac{6}{7}}, BC = 9, CD = 9, \varphi = 2 \arcsin \sqrt{\frac{87}{77}}}$$