

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2002 год, вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin^2 2x + \sin^2 4x = 1 - \frac{\cos 2x}{\cos 3x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u \text{ , } \frac{\pi}{u\pi\pi} = x \text{ , } \frac{\pi}{u\pi} + \frac{\pi}{x} = x$$

2. Решить неравенство

$$2 \log_{2x-12} (\sqrt{x+1} - \sqrt{9-x}) < 1.$$

$$8 > x > 1 \text{ , } \frac{\pi}{81} > x > 9$$

3. Окружность с центром на стороне AB равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) касается отрезка AC в точке F , пересекает отрезок BC в точке G , проходит через точку B и пересекает отрезок AB в точке E , причем $AE = a$, $\angle BFG = \gamma$. Найти радиус окружности.

$$\left(\frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi}\right) \sin^{-1} = \mathcal{Y}$$

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 8, высота SO равна 3. Точка M — середина ребра SB , точка K — середина ребра BC . Найти:

1. объем пирамиды $AMSK$;
2. угол между прямыми AM и SK ;
3. расстояние между прямыми AM и SK .

$$\frac{13}{24} \left(\frac{\pi}{8} \cos \pi \right) (2; 8; 1)$$

5. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a + 3 - |x + 2|)(a + x^2 + 4x) = 0$$

имеет

1. ровно три корня;
2. ровно два корня.

$$(1) a = -3, a = 4; (2) a < -3, a > 4, a = \frac{\sqrt{29}-7}{2}$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 - xyz + 11 = 0, \\ x^3 - y^3 + z^3 - xyz - 21 = 0, \\ y^3 + z^3 - x^3 - xyz - 3 = 0. \end{cases}$$

$$\boxed{(9; 7; 8) \frac{81\sqrt{2}}{1} (7; 7; 1)}$$