

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 2000 год, вариант 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \frac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

$$(4; -2), (-4; 2)$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16 \cos 4x (1 + 2 \cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

$$\mathbb{Z} \ni u; \frac{7}{ux} + \frac{9}{x} \mp x; \frac{7}{ux} + \frac{8}{x} = x$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 2x| - 2} \leq \frac{1}{|\log_4 x^2| - 1}.$$

$$x \neq x; 1 \leq x; \frac{x}{1} > x > \frac{8}{1}$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D . Найти радиус окружности, если $CD = 4$, $BD = 5$.

$$\frac{8}{2\sqrt{2}}$$

5. Найти все значения a , при которых уравнение

$$\log_{4x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

$$1 = a; 0 > a$$

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2 \arctg(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найти:

1. объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;

2. площадь пирамиды треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

$$\frac{84\sqrt{39}}{1632\sqrt{3}}; 2; \frac{55}{275} (1)$$