

## Московский физико-технический институт

### Письменный экзамен по математике, 1999 год, вариант 2

1. Найти решения  $(x, y)$  системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3(5y - x - 2) - \log_9(x - y)^2 = 1, \\ \log_3\left(1 - \frac{2}{y} - 4x\right) - \log_9 x^2 = 1, \end{cases}$$

которые удовлетворяют неравенству  $x - y < 0$ .

$(\frac{2}{3} \wedge \frac{2}{3} \wedge - 1)$

2. Решить уравнение

$$2 + \sqrt{3} \sin 2x - |\cos 2x| = 4 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$\mathbb{Z} \ni \varphi \wedge \varphi \wedge \varphi + \frac{\pi}{4} = x \wedge \varphi \wedge \varphi + \frac{\pi}{4} = x \wedge \varphi \wedge \varphi + \frac{\pi}{4} = x \wedge \varphi \wedge \varphi + \frac{\pi}{4} = x$

3. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^3 - 22x^2 + 40x}}{x - 4} \geq 3x - 10.$$

$\frac{9}{5} \geq x > \frac{1}{4}, \frac{8}{11} = x \wedge \frac{8}{8} \geq x \geq 0$

4. Медиана  $AE$  и биссектриса  $CD$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) пересекаются в точке  $M$ . Прямая, проходящая через  $M$  параллельно  $AC$ , пересекает  $AB$  и  $BC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Найти  $MQ$  и радиус окружности, описанной около треугольника  $PQB$ , если  $AC = 4$ ,  $\angle ACB = \arctg(2\sqrt{2})$ .

$\frac{12}{12}, \frac{7}{28}, \frac{7}{12}$

5. Дана система неравенств

$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 2, \\ x^2 + y^2 \geq 4(x + y - 1), \\ (y - 3x - 2)(3y - x + 2) \leq 0. \end{cases}$$

Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют:

- а) первому неравенству системы;
- б) первым двум неравенствам системы;
- в) всем трем неравенствам системы.

$\frac{1}{2} - 9 \wedge \frac{1}{2} - 10 \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2} \wedge \frac{1}{2}$

6. Сторона основания  $ABCD$  правильной пирамиды  $SABCD$  равна 2, высота пирамиды, опущенная на основание, равна  $2\sqrt{2}$ . На ребрах  $SA$  и  $SD$  расположены точки  $E$  и  $F$  так, что  $AE = 2ES$ ,  $SF = 5DF$ . Через точки  $E$  и  $F$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная  $CD$ . Найти:
- 1) площадь фигуры, полученной при пересечении пирамиды плоскостью  $\alpha$ ;
  - 2) радиус сферы с центром в точке  $A$ , касающейся плоскости  $\alpha$ ;
  - 3) угол между плоскостью  $\alpha$  и плоскостью  $ABC$ .

$\frac{11}{2}$ площадь $(S : \frac{88}{2\sqrt{10}})$ $(\alpha : \frac{96}{22})$ (1)
---