

# Московский физико-технический институт

## Письменный экзамен по математике, 1997 год, вариант 3

1. Найти все действительные корни уравнения

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| = 7.$$

$$\boxed{6 = x}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6 \sin x \cos y + 2 \cos x \sin y = -3, \\ 5 \sin x \cos y - 3 \cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbb{Z} \ni u \quad \mathbb{Z} \ni y \quad u \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (1+y) + \frac{\pi}{2} = \pi \quad u \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (1+y) + \frac{\pi}{2} = x}$$

3. Около окружности описаны ромб со стороной 3 и треугольник, две стороны которого параллельны диагоналям ромба, а третья параллельна одной из сторон ромба и равна 7. Найти радиус окружности.

$$\boxed{\frac{9}{2}}$$

4. Пусть  $M$  — множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$  таких, что числа  $3x$ ,  $2y$  и  $9 - y$  являются длинами сторон некоторого треугольника. Найти площадь фигуры  $M$ .

Фигура  $\Phi$  состоит из точек множества  $M$  таких, что неравенство  $t^2 + 2t(x - 2) + 7 - y > 0$  выполняется при всех значениях параметра  $t$ . Найти площадь фигуры  $\Phi$ .

$$\boxed{\frac{9}{8}}$$

5. В треугольной пирамиде  $ABCD$  ребра  $AC$  и  $BD$  взаимно перпендикулярны,  $AB = BD = AD = a$ , середина ребра  $AC$  равноудалена от плоскостей  $ABD$  и  $BCD$ , угол между ребром  $AC$  и гранью  $CBD$  равен  $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ . Найти длину ребра  $CD$ , угол  $CAD$  и угол между ребром  $BD$  и гранью  $ACD$ .

$$\boxed{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}}$$