Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1996 год, вариант 2

1. Решить уравнение
$$\log_{49}(x-1)^2+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}\left(\frac{2x+9}{7x+9}\right)=0.$$

$x_1=-7$, $x_2=0$, $x_3=3$

2. Найти все значения a, при которых неравенство
$$\frac{8x^2-20x+16}{4x^2-10x+7}\leqslant a$$
является верным при всех значениях x.

$a\geqslant\frac{14}{3}$

3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) биссектрисы AM и BK пересекаются в точке O. Площади треугольников BOM и COM соответственно равны 25 и 30. Найти площадь треугольника ABC и проекцию отрезка OM на прямую BC.

площадь треугольника ABC равна 176, проекция отрезка OM на прямую BC равна $2\sqrt{\frac{3}{11}}$

4. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\left|\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)\right|=-\sqrt{2}\cos y,\\ \cos 2y+2\sin 2x+\frac{3}{4}=2\sin^3 2x.\end{cases}$$

$\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2};\pm\frac{3}{4}\pi+2\pi n\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины ребер AB и B_1C_1 соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK=2KC$. Найти:

1) расстояние от точки N до прямой AK;
2) расстояние между прямыми MN и AK;
3) расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK.

$6\sqrt{\frac{17}{33}}$; $\frac{18}{\sqrt{53}}$; $\frac{66}{\sqrt{173}}$