Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1995 год, вариант 3

1. Найти наименьшее натуральное число n, при котором выполняется равенство

$$\sin(n^\circ + 80^\circ) + \sin(n^\circ - 40^\circ) + \sin(n^\circ + 70^\circ) - \cos 25^\circ = 0.$$

$\boxed{n = 105}$

2. Решить неравенство $5 - 3\,|3^x - 1| < \sqrt{10 - 3^{x+1}}$.

$\boxed{x < -1,\ \log_3 2 < x \leqslant \log_3 10 - 1}$

3. В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O. Касательная к окружности пересекает стороны BC и CA треугольника в точках M и N соответственно. Найти радиус окружности, если $\angle MNC = 2\angle NMC$, $OM = \sqrt{10}$, $ON = \frac{15}{4}$.

$\boxed{r = 3}$

4. На координатной плоскости рассматривается фигура Ф, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{y-x}(2y - 2xy) \leqslant 2, \\ |x| \leqslant 4 - y. \end{cases}$$

Изобразить фигуру Ф и найти ее площадь.

$\boxed{S = 10 - \frac{\pi}{4}}$

5. На ребре AC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ взята точка K так, что $AK = \frac{1}{4}$, $CK = \frac{3}{4}$. Через точку K проведена плоскость, образующая с плоскостью ABC угол $\operatorname{arctg}\frac{7}{6}$ и рассекающая призму на два многогранника, площади поверхностей которых равны. Найти объем призмы, если известно, что около одного из этих многогранников можно описать сферу, а около другого — нет.

$\boxed{V = \frac{3}{8}}$