

Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1994 год, вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sqrt{17 - 7 \sin 2x} = 3 \cos x - 5 \sin x.$$

$$\boxed{x \in \pi/2 + \frac{\pi}{6} + 2\pi n \text{ или } x \in \pi/2 + \frac{\pi}{6} + 2\pi n + \pi}$$

2. На координатной плоскости даны точки $A(2; -3)$ и $B(4; 0)$. При каких значениях параметра p , $p > -5$, ближайшая к графику функции $y = \sqrt{x^3} + p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB ?

$$\boxed{1 \geq p \geq \frac{8}{9}}$$

3. Решить неравенство

$$\log_8 \left(\frac{1}{3} - x \right) \log_{|2x + \frac{1}{3}|} \left(\frac{1}{3} - x \right) > \log_2 \frac{\frac{1}{3} - x}{\sqrt[3]{(2x + \frac{1}{3})^2}}.$$

$$\boxed{\frac{2}{3} > x > 0 \text{ или } \frac{8}{9} > x}$$

4. В треугольнике ABC угол A равен $\pi - \arcsin(8/17)$, а длина стороны BC равна 8. На продолжении CB за точку B взята точка D так, что $BD = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину A , касающейся прямой BC в точке D и касающейся окружности, описанной около треугольника ABC .

$$\boxed{\frac{7}{6}}$$

5. Сфера, касающаяся нижнего основания цилиндра, имеет единственную общую точку с окружностью его верхнего основания и делит ось цилиндра в отношении $1 : 6 : 2$, считая от центра одного из оснований. Найти объем цилиндра, если известно, что сфера касается двух его образующих, находящихся на расстоянии 8 друг от друга.

$$\boxed{9\sqrt{86}}$$