Московский физико-технический институт

Письменный экзамен по математике, 1994 год, вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}{3\sin x + \cos 2x} = \operatorname{ctg} 2x.$$

$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

2. Решить неравенство

$$3^x \left(\sqrt{9^{1-x} - 1} + 1\right) < 3\left|3^x - 1\right|.$$

$\log_3 \frac{12}{5} < x \leqslant 1$

3. Даны треугольник ABC и ромб $BDEF$, все вершины которого лежат на сторонах треугольника ABC, а угол при вершине E — тупой. Найти площадь треугольника ABC, если $AE = 3$, $CE = 7$, а радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1.

$S = 5\sqrt{5}$; $BD = \frac{21}{4\sqrt{5}}$, $\sin\angle ABC = \frac{8\sqrt{5}}{21}$

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB : BC = 2 : 3$. Точки F и F_1 — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Сфера касается всех звеньев ломаной $AFDD_1A_1$ и пересекает отрезок F_1F в точках F_1 и E. Найти объем параллелепипеда и радиус сферы, если $F_1E = 3/2$.

$V = \frac{12}{15}$, $R = \frac{\sqrt{13}}{4}$ $\left(AB = 1,\ BC = \frac{3}{2},\ AA_1 = \frac{8}{5}\right)$

5. Корни уравнения

$$x^3 - \frac{32}{p}x^2 + \frac{5}{\sqrt{p}}x - \frac{15}{64} = 0$$

являются длинами сторон некоторого треугольника, а корни уравнения

$$x^3 - \frac{1}{3}\left|\log_2 p\right| x^2 + \left(\log_{8\sqrt{2}p} p\right) x - \frac{1}{11 + \sqrt{p}} = 0$$

— длинами высот этого же треугольника. Найти p и площадь треугольника.

$p = 16$, $S = \frac{1}{8}$ $\left(p = 1,\ p = 2^{-15/2}\right.$ — посторонние корни уравнения $\left.\log_2^2 p = 30\log_{8\sqrt{2}} p\right)$