

Олимпиада «Ломоносов» по математике

11 класс, 2025 год

1. Решите уравнение:

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} + \left(\sqrt{-(x-2)}\right)^2 = \sqrt{3 + \sqrt{8}} + \sqrt{3 - \sqrt{8}}.$$

$[7; 9; 1] \ni x$

2. Укажите наименьшее положительное значение a , при котором неравенство

$$2^{5 - \frac{1}{x}} \geq a + \sin(2^x)$$

не имеет ни одного решения $x > 0$.

EE

3. В окружность радиуса 3 вписан четырёхугольник, три стороны которого равны 3, 3, $3\sqrt{2}$. Найдите максимально возможную площадь такого четырёхугольника.

$\frac{4}{3} \sqrt{81 + 27}$

4. Найдите все решения уравнения

$$\cos^3(\pi x) + \cos^3(2\pi x) - \cos^3(4\pi x) = \left(\cos(\pi x) + \cos(2\pi x) - \cos(4\pi x)\right)^3,$$

принадлежащие отрезку $[0, 3; 1, 6]$.

$\frac{5}{8}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}; 1; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{3}{1}$

5. Даны три функции:

$$f_1(x) = (x + a_1)(x^2 + b_1x + 6),$$

$$f_2(x) = (x + a_2)(x^2 + b_2x + 8),$$

$$f_3(x) = (x + a_3)(x^2 + b_3x + 12).$$

Все числа a и b положительны, а также для каждого действительного x выполняется условие $f_1(x) = f_2(x) = f_3(x)$. Найти значение суммы $a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3$.

27

6. Газонная поливалка равномерно разбрызгивает вокруг себя воду в круге радиуса $4 - 2\sqrt{2}$. На границе этого круга расположена другая такая же поливалка. А ровно посередине между двумя поливалками находится вход в нору. Мышь, хозяйка норы, хочет вернуться домой, но не хочет сильно вымокнуть. Найдите длину пути, на котором мышь намокнет меньше всего. Мышь может менять направление бега, но её скорость постоянна, и под душем двух поливалок мышь мокнет вдвое быстрее.

$4 - 2\sqrt{2}$

7. Первооткрыватель летел над джунглями на вертолёте и заметил забытый храм инков. Храм выстроен в форме правильной усечённой пирамиды с квадратными основаниями — сторона нижнего основания равна 2048 и. е., сторона верхней площадки равна 486 и. е. (и. е. — инкские единицы длины). Высоту храма путешественник измерить не сумел, поэтому посадил вертолёт на верхней площадке и начал спускаться по боковой поверхности пирамиды, начиная от угла. Спускался он не напрямую — склон для этого слишком крут — а наискосок, по линии, угол наклона которой к поверхности земли равен 45° . Когда он добирался до бокового ребра, он переходил через ребро и шёл по следующей грани, под таким же углом 45° к поверхности земли. Он закончил спуск ровно у вершины нижнего основания пирамиды, насчитав по пути 5 сторон (иными словами, его путь выглядит как ломаная, и в этой ломаной получилось 5 отрезков). Какой высоты (в и. е.) был храм?

$3905\sqrt{2}$

8. Через три стороны правильного 30-угольника проводят прямые. Стороны выбирают так, что прямые пересекаются друг с другом, и исходный многоугольник лежит внутри полученного треугольника. Сколько попарно неравных треугольников может получиться? Равными считаются треугольники, которые можно совместить поворотом или отражением.

61