

Олимпиада «Ломоносов» по математике

10 класс, 2025 год

1. Решите неравенство:

$$\sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x} - \sqrt{\log_2^2 x + 3 \log_2 x - 4} \geq \log_2 x + 1.$$

В ответ запишите сумму всех целых значений функции $f(x_0) = 16x_0$, где x_0 — решение неравенства.

33

2. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке O . Прямая AO пересекает описанную окружность треугольника OBC в точках O и M . Найдите длину секущей OM , если $BC = 6$, $AB : AC = 3 : 1$, и $\angle BAC = 60^\circ$.

43

3. Решите неравенство:

$$\sqrt{\sqrt{\cos x} + 2\sqrt{-3 \sin x}} > 2\sqrt{\sqrt{\cos x} - \sqrt{-3 \sin x}}.$$

$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[-\arctg \frac{3}{1} + 2\pi n; \arctg \frac{3}{1} + 2\pi n \right) \right)$

4. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x + 1 - a| + |4^x - a| = 4^x - x - 1$$

имеет на промежутке $[-1; 1]$ единственное решение?

0; 0,5; 1; 4

5. На каждой стороне белого кубика сидит по жуку. Кубик бросили, и жуки переполошились — каждый выбрал наугад одну из 4-х соседних граней и переполз туда. С какой вероятностью кубик не изменит своего первоначального вида?

$\frac{256}{5}$

6. На чертеже есть парабола и три точки A, B, C . Из каждой точки к параболе проведены две перпендикулярные друг другу касательные. Расстояние от вершины O параболы до прямой AC равно 2. Найдите площадь треугольника OAB , если $AC = 4$, а $BC = 3$.

1; 7

7. Назовём натуральное число счастливым, если все его цифры можно разбить на две группы, сумма цифр в каждой из которых одинакова. Примеры: 38221 ($3 + 2 + 2 + 1 = 8$), 5678 ($5 + 8 = 6 + 7$). Назовем число суперсчастливым, если оно счастливое и следующее за ним целое число тоже счастливое. Найдите количество суперсчастливых чисел на отрезке $[400; 2400]$.

9

8. Вася нарисовал на доске замкнутую кривую $ABCD$, состоящую из четырёх звеньев: AB — дуга окружности, меньшая полуокружности, BC — отрезок, CD — дуга окружности, большая полуокружности, DA — отрезок, таким образом, что любые два соседних звена перпендикулярны друг другу. Петя нарисовал кривую данного вида так, чтобы длины всех звеньев совпадали. Какие тогда будут углы у дуг AB и DC ? *Примечание:* прямая перпендикулярна дуге окружности, если прямая перпендикулярна касательной к окружности.

$$\frac{yz - zy}{z^2} + y \text{ и } \frac{yz - zy}{z^2} - y \text{ или } \frac{1 + zy}{1 + z} + 1 - y \text{ и } \frac{1 + zy}{1 + z} - 1 + y$$