

Олимпиада «Ломоносов» по математике

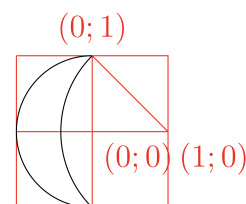
11 класс, 2024 год

1. Болельщики должны выбрать 6 лучших хоккеистов чемпионата: одного вратаря, двух защитников и трех нападающих. Среди претендентов: 3 вратаря, 5 защитников, 6 нападающих и 3 «универсала». «Универсал» — игрок, хороший в разных ролях, который поэтому может быть выбран как в качестве защитника, так в качестве нападающего (но не вратаря). Сколько существует способов выбрать эту шестерку? Требуется получить числовое значение.

9999

2. Живописец закрасил акварелью полумесяц на клетчатой бумаге. Контур полумесяца состоит из двух дуг — одна от окружности с центром в $(0; 0)$, проходящей через $(0; 1)$, другая — от окружности с центром в $(1; 0)$, проходящей через $(0; 1)$.

К утру краска расплылась так, что каждая точка полумесяца превратилась в круг радиуса 0.5. Найдите площадь получившейся фигуры.



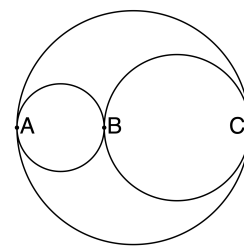
$$\frac{\pi}{2\sqrt{x}} + \frac{\pi}{x\sqrt{x}} + 1$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (xy - 3 + 3x - y)|y - x - 9| = (x - 4)|xy - 3 + 3x - y|, \\ \sqrt{y - x + 9} = y - 4. \end{cases}$$

(81 '69-) '(8 '1)

4. Автодром состоит из трех попарно касающихся кольцевых трасс (см. рисунок). Автомобиль в любой точке касания может продолжать движение по любой из двух возможных трасс, но нигде не может разворачиваться на 180° . По каждой из трех трасс автомобиль едет со своей скоростью, так что любую из дуг AB длиной 15 км он проезжает за 7 минут, любую из дуг BC длиной 25 км — за 11 минут, а любую из дуг AC — за 17 минут. Выехав из точки A , автомобиль через 1 час 25 минут оказался в ней же. Сколько километров проехал автомобиль?



061

5. Функция $y = f(x)$ такова, что $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{x-1}$. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$g(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{10}$$

в точке $x = 0$.

1024
1

6. Старинный подземный ход имеет свод параболической формы (то есть в поперечном сечении туннель ограничен полом — осью Ox и графиком некоторой параболы $y = a - bx^2$). Ширина туннеля (измеряется по полу) равна 24, высота туннеля равна 18. Ход укрепили распорками — на параболе отметили точки A, B, C, D и соединили их между собой балками. Балки AB и CD параллельны полу, AD пересекается с BC , и при этом $\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$. Найдите расстояние между балками AB и CD .

8

7. Пусть $S(n)$ означает сумму цифр натурального числа n . Найти наибольшее 100-значное натуральное число n , удовлетворяющее условию: для всех натуральных m ($1 \leq m \leq n$) справедливы равенства $S(mn) = S(n)$.

$1 - 00101 = u$

8. Сколько точек пространства с целочисленными координатами принадлежат треугольнику с вершинами $(3, 4, 5)$, $(11, 10, 6)$, $(5, 8, 9)$? Точки на вершинах и сторонах тоже считаются.

8