

## Олимпиада «Ломоносов» по математике

9 класс, 2021 год

1. Два автомобиля преодолели одинаковое расстояние. Скорость первого была постоянна и в 3 раза меньше, чем начальная скорость второго. Второй автомобиль проехал первую половину пути, не меняя скорость, затем он резко сбросил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё четверть пути и снова снизил скорость в два раза, проехал с постоянной скоростью ещё восьмую часть пути, и т. д. После восьмого понижения скорости он не менял её до конца поездки. Во сколько раз второму автомобилю потребовалось больше времени на преодоление всего пути, чем первому?

2. Сколько существует делителей числа  $2021^{2021}$ , кубический корень из которых является натуральным числом?

3. Решите систему

$$\begin{cases} |x^4 - 625x^2| \neq x^4 - 625x^2, \\ |6x^2 - 257x + 251| + 6x^2 - 257x + 251 = 0. \end{cases}$$

4. Сколько существует троек чисел  $a, b, c$ , каждое из которых служит корнем соответствующего уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ?

5. Найдите наименьшее значение функции  $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1}$  при  $x > 0$ .

6. В остроугольном треугольнике  $ABC$  со стороной  $AC = 1$  провели высоту  $BH$ , в треугольнике  $BHC$  — биссектрису  $CL$ , в треугольнике  $BLC$  — медиану  $BM$ . Прямая  $AL$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $K$ , причём  $\angle BHK = \angle MHC = 15^\circ$ . Найдите площадь четырёхугольника  $KLHM$ .

7. На числовой прямой отмечены 200 точек, имеющие координаты  $1, 2, \dots, 200$ . Двое игроков по очереди ставят в любую из ещё незанятых точек число «0» или число «1». Когда все возможные ходы сделаны, рассматриваются 199 отрезков  $[1; 2], [2; 3], [3; 4], \dots, [199; 200]$  и подсчитываются баллы за каждый отрезок: если концы отрезка содержат одинаковые числа, то 1 балл получает первый игрок, если разные — то второй.

- Кто из игроков может обеспечить себе бóльшую сумму баллов независимо от ходов соперника?
- С каким максимальным преимуществом одного из игроков может закончиться эта игра (при условии, что каждый игрок играет наилучшим для себя образом)?