Олимпиада «Курчатов» по математике

10 класс, 2021 год

1. Маша написала на доске положительное число. Оказалось, что его целая часть на 43% меньше самого числа. Какое число написала Маша? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.

Целая часть числа — это наибольшее целое число, не превосходящее данное.

2. Числа d и e — корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Могло ли так получиться, что a, b, c, d, e — это подряд идущие целые числа в некотором порядке?

3. . Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с прямым углом A ($BC \parallel AD$). Известно, что $BC = 1$, $AD = 4$. На стороне AB отмечена точка X, а на стороне CD — точка Y так, что $XY = 2$, $XY \perp CD$. Докажите, что описанная окружность треугольника XCD касается AB.

4. Пару натуральных чисел назовём хорошей, если одно из чисел делится нацело на другое. Числа от 1 до 30 разбили на 15 пар. Какое наибольшее количество хороших пар могло получиться?

5. . Петя и Вася играют в следующую игру. У них есть клетчатый прямоугольник 1000×2020, первым ходит Петя. Своим ходом первый игрок делит прямоугольник на два меньших одним разрезом вдоль линии сетки. Затем второй игрок выбирает один из двух получившихся прямоугольников, на котором будет продолжаться игра (второй прямоугольник отбрасывается), и делит его на два меньших. Потом опять первый выбирает прямоугольник, на котором будет продолжаться игра, и т. д. Проигрывает тот, кто не может в свой ход разрезать прямоугольник. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

6. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Некоторые жители острова дружат друг с другом (дружба взаимна).

Утром каждый житель острова заявил, что дружит с нечётным числом рыцарей. Вечером каждый житель острова заявил, что дружит с чётным числом лжецов. Может ли количество жителей этого острова быть равно 2021?