

Олимпиада «Курчатов» по математике

8 класс, 2020 год

1. Про два ненулевых числа a и b известно, что

$$a^2 + \frac{b^3}{a} = b^2 + \frac{a^3}{b}.$$

Верно ли, что числа a и b равны?

2. У квадрата 5×5 есть 5 столбцов, 5 строк и 18 диагоналей, включая диагонали длины один. В каждой клетке этого квадрата Вова написал число 1, 3, 5 или 7, а Лёша посчитал сумму чисел по каждому столбцу, строке и диагонали. Докажите, что среди полученных Лёшей сумм есть хотя бы две равные.

3. Додсон, Уильямс и их конь Боливар хотят как можно быстрее добраться из города А в город Б. Вдоль дороги стоят 27 телеграфных столбов, которые делят весь путь на 28 одинаковых промежутков. Промежуток между столбами Додсон преодолевает пешком за 9 минут, Уильямс — за 11 минут, а верхом на Боливаре любой из них преодолевает это расстояние за 3 минуты (Боливар не выдержит двоих). Они выдвигаются из города А одновременно; путешествие считается оконченным, когда все окажутся в городе Б.

У ло вильямс, чтивя оу

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH . На продолжении гипотенузы BC за точку C нашлась точка X такая, что

$$HX = \frac{BH + CX}{3}.$$

Докажите, что $2\angle ABC = \angle AXC$.

5. В клетках шахматной доски 8×8 стоят 8 белых и 8 чёрных фишек так, что никакие две фишки не стоят в одной клетке. Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке не стоят одноцветные фишки. Для каждой белой фишки посчитали расстояние до чёрной фишки, стоящей с ней в одном столбце. Какое наибольшее значение может принимать сумма этих расстояний? Расстоянием между фишками будем считать расстояние между центрами клеток, которые они занимают.