

Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2020 год

1. В Курчатовской школе за каждой партой сидит ровно 2 человека. Известно, что ровно у 70% мальчиков сосед по парте — мальчик, а ровно у 40% девочек — девочка. Во сколько раз мальчиков больше чем девочек?

79

2. Найдите количество способов раскрасить все натуральные числа от 1 до 20 в синий и красный цвета так, чтобы оба цвета встречались и произведение всех красных чисел было взаимно просто с произведением всех синих чисел.

79

3. На доске написаны числа $2, 3, 5, \dots, 2003, 2011, 2017$, т.е. все простые числа, не превосходящие 2020. За одну операцию можно заменить два числа a, b на максимальное простое число, не превосходящее $\sqrt{a^2 - ab + b^2}$. После нескольких операций на доске осталось одно число. Какое максимальное значение оно может принимать?

4. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида с основанием $ABCD$. На отрезке AC нашлась точка M такая, что $SM = MB$ и плоскости SBM и SAB перпендикулярны. Найдите отношение $AM : AC$.

34

5. Докажите, что при натуральном $n > 2$ числа от 1 до n можно разбить на два множества так, чтобы произведения чисел в множествах отличались не более чем в $\frac{n-1}{n-2}$ раз.

6. Докажите, что существуют такие последовательности натуральных чисел a_n и b_n , что одновременно выполнены следующие условия:

- последовательности a_n и b_n являются неубывающими;
- последовательности $A_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ и $B_n = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}$ неограниченно возрастают;
- последовательность $C_n = \frac{1}{\max(a_1, b_1)} + \frac{1}{\max(a_2, b_2)} + \dots + \frac{1}{\max(a_n, b_n)}$ ограничена.