

## Олимпиада «Курчатов» по математике

11 класс, 2019 год

1. Петя и Вася участвовали в выборах на должность президента шахматного клуба. К полудню у Пети было 25% голосов, а у Васи — 45%. После полудня на голосование приходили только друзья Пети (и, соответственно, голосовали только за него). В итоге у Васи осталось только 27% голосов. Сколько процентов голосов набрал Петя?

2. Найдите все такие пары натуральных чисел  $m$  и  $n$ , что  $m^{2019} + n$  делится на  $mn$ .

3. По кругу лежат 100 пирожков, из них 53 с капустой, а остальные — с рисом. Алексей знает, какие из них с чем, и хочет выбрать 67 подряд лежащих пирожков так, чтобы среди них было ровно  $k$  с капустой. При каких  $k$  ему это гарантированно удастся сделать независимо от расположения пирожков? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

4. Про положительные числа  $x$  и  $y$  известно, что

$$\frac{1}{1+x+x^2} + \frac{1}{1+y+y^2} + \frac{1}{1+x+y} = 1.$$

Какие значения может принимать произведение  $xy$ ? Укажите все возможные варианты и докажите, что других нет.

5. Определите количество возможных значений произведения  $a \cdot b$ , где  $a, b$  — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$2019^2 \leq a \leq b \leq 2020^2.$$

618Z918

6. В тетраэдре  $ABCD$  выполнены равенства:

$$\angle BAC + \angle BDC = \angle ABD + \angle ACD, \quad \angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

Докажите, что центр описанной сферы тетраэдра лежит на прямой, соединяющей середины ребер  $AB$  и  $CD$ .