

Олимпиада КФУ по математике

8 класс, 2023 год

1. Клетчатый прямоугольник, длины обеих сторон которого — чётные числа, разрезали на фигурки вида



так, что присутствуют фигурки обоих видов. Какую наименьшую площадь мог иметь такой прямоугольник? Приведите пример соответствующего разрезания и объясните, почему меньшая площадь невозможна. Фигурки можно поворачивать и переворачивать. Длина стороны прямоугольника равна количеству клеточек, прилегающих к ней. Площадь клетчатого прямоугольника — это количество клеток, которые он содержит.

2. Мама испекла Ане на день рождения торт, который весит целое число граммов. Перед тем, как украсить его, мама взвесила торт на цифровых весах, которые округляют вес до десятков граммов в ближайшую сторону (если вес оканчивается на 5, то весы округляют его в меньшую сторону). Результат оказался равным 1440 г. Когда мама украсила торт одинаковыми свечками, количество которых было равно возрасту Ани, весы показали 1610 г. Известно, что вес каждой свечки составляет целое число граммов, при этом если положить на весы одну свечу, то они покажут 40 г. Сколько лет может быть Ане? Укажите все ответы и объясните, почему других нет.

3. Можно ли переменные a, b, c, d заменить на какие-нибудь четыре последовательных натуральных числа в некотором порядке так, чтобы стало верным равенство

$$(a + b)(b + c)(c + d) = (c + a)(a + d)(d + b)?$$

4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD такая, что $AD = 3BC$. Точка K — середина диагонали BD . Оказалось, что AK — биссектриса угла CAD . Докажите, что $AC = 2BC$.

5. На шахматной доске стоят 12 ферзей. Докажите, что можно выбрать четыре строчки и четыре столбца так, чтобы ни на одной из 16 клеток, стоящих на их пересечениях, ферзей не было. Доска имеет размеры 8×8 .