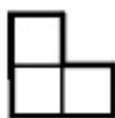


## Олимпиада КФУ по математике

7 класс, 2022 год

1. На острове рыцарей и лжецов живет 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем (который всегда говорит правду), либо лжецом (который всегда лжет). Однажды каждый из них сказал: «Среди остальных 2021 жителя острова есть по меньшей мере один лжец». Сколько рыцарей живет на острове? Обоснуйте свой ответ.

2. Из клетчатого квадрата  $6 \times 6$  нужно вырезать по линиям сетки квадратик меньшего размера так, чтобы оставшуюся часть можно было разбить на уголки из трех клеток



без пропусков и наложений. Уголки можно поворачивать и переворачивать. Чему могут равняться размеры вырезанного квадратика? Укажите все возможные ответы и объясните, почему других нет.

3. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  ( $AC = BC$ ) проведена биссектриса  $BD$ . Точка  $E$ , лежащая внутри отрезка  $AB$ , такова, что  $CE = BE$ . Отрезки  $BD$  и  $CE$  пересекаются в точке  $F$ . Оказалось, что  $DF = CF$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ . Обоснуйте свой ответ.

4. Даны действительные числа  $a, b, c$ . Известно, что числа  $a + b, b + c, c + a$  — это три последовательные целые числа, записанные в каком-то порядке (необязательно по возрастанию), причем наибольшее из них нечетно. Докажите, что числа  $a, b, c$  также являются тремя последовательными целыми числами, записанными в каком-то порядке.

5. Восемь шахматистов играют однокруговой турнир (всего играется семь туров, в каждом туре шахматисты разбиваются на четыре пары и в каждой паре играют друг с другом. В итоге каждый играет с каждым ровно по одному разу). За победу дается 1 очко, за ничью —  $1/2$  очка, за поражение — 0 очков. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель турнира уже выявился досрочно? Обоснуйте свой ответ.