

## Олимпиада КФУ по математике

11 класс, 2022 год

1. Пусть  $p$  — нечётное простое число. Найдите все целые  $x$  и  $y$  такие, что  $x^3 + y^3 + p^3 = x^2y + xy^2$ .
2. Функция  $f$  для всех действительных  $x, y$  удовлетворяет неравенствам  $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$  и  $f(x) \geq x$ . Найдите все такие функции  $f(x)$ .
3. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна  $777 \dots 77$  (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?
4. В неравностороннем треугольнике  $ABC$  провели высоту  $BH$ , медиану  $BM$  и биссектрису  $BL$ . Точки  $P$  и  $Q$  — ортогональные проекции вершин  $A$  и  $C$  на прямую  $BL$ . Докажите, что точки  $M, H, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.