

Олимпиада Innopolis Open по математике

11 класс, 2025 год

1. Пусть D — некоторое фиксированное непустое множество, а $f(x, y)$ — функция двух переменных, принимающих значения из D . Известно, что

1. $f(x, f(y, z)) = f(f(x, z), y)$ для любых $x, y, z \in D$;
2. для любых значений $x, z \in D$ существует такое $y \in D$, что $f(x, y) = z$.

Докажите, что существует такое $t \in D$, что $f(t, x) = x$ для всех $x \in D$.

2. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_{2025}$ — неотрицательные числа, и

$$(x + b_1)(x + b_2) \dots (x + b_{2025}) = a_{2025}x^{2025} + a_{2024}x^{2024} + \dots + a_1x + a_0.$$

Докажите, что $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ для любого $i = 1, 2, 3, \dots, 2024$.

3. В стране N есть 10 городов, каждая пара которых соединена двусторонним авиамаршрутом, который обеспечивается одной из двух авиакомпаний. Докажите, что одна из этих авиакомпаний может предложить своим пассажирам два циклических маршрута, каждый из которых проходит по нечетному числу городов, причем ни один город не является частью обоих маршрутов.

4. Дан остроугольный треугольник ABC , около которого описана окружность Ω и в котором проведены высоты AA_1, CC_1 . Касательные к Ω , проведенные в точках A и C , пересекаются в точке D , и прямая A_1C_1 пересекает прямые CD, AD в точках E, F , соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается Ω .

5. Даны целое $a > 0$, не являющееся целой степенью числа 10, и целое $b > 0$. Верно ли, что существует такое целое $n > 0$, что в десятичной записи числа a^n встречается десятичная запись числа b ? (Например, для $a = 2$ и $b = 19$ можно выбрать $n = 13$, т.к. $2^{13} = 8192$, в записи которого есть 19.)

Да, верно