Олимпиада Innopolis Open по математике

10 класс, 2025 год

1. Есть два приведенных (то есть с коэффициентом 1 при старшей степени) многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ равных четных степеней с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(x) = Q(x)$ не имеет вещественных корней. Какие из следующих уравнений имеют, а какие не имеют вещественные корни (хотя бы один корень)?

1. $P(x) = Q(x+1)$;
2. $P(x+1) = Q(x+1)$;
3. $P(x+2) = Q(x+1)$.

Уравнения 1 и 3 имеют хотя бы по одному, уравнение 2 — ни одного

2. Множество всех целых положительных чисел разбили на два непересекающихся подмножества — A и B. Докажите, что для любого целого $n > 0$ найдутся такие целые $x > y > n$, что

$$\{x, y, x+y\} \subseteq A \quad \text{или} \quad \{x, y, x+y\} \subseteq B.$$

3. Бесконечная последовательность $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ строится следующим образом:

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1,$$

и для $n > 3$

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2} + a_{n-3}.$$

Докажите, что для любого целого $d > 0$ найдется член этой последовательности, кратный d.

4. За один ход разрешается одновременно заменять все члены последовательности

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$$

действительных чисел на

$$|a - x_1|, |a - x_2|, |a - x_3|, \ldots, |a - x_n|,$$

соответственно (число a для разных ходов может быть разным). Докажите, что за конечное число ходов из любой начальной последовательности можно получить последовательность, состоящую только из нулей $(0, 0, 0, \ldots, 0)$, и найдите наименьшее число ходов, за которое гарантированно можно этого добиться для фиксированного n.

$\boxed{u}$

5. Точки A, B, C, D расположены на прямой в указанном порядке, причем $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = c$. Найдите все положительные c, для каждого из которых найдется такая точка P (не лежащая на прямой AB), что PB, PC — трисектрисы (лучи, делящие угол на три равные части) угла $\angle APD$.

$\boxed{(3/5; +\infty)}$