Олимпиада Innopolis Open по математике

10–11 классы, 2024 год

1. Сколькими способами из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2024\}$ можно выбрать n чисел так, чтобы сумма любых m (произвольное натуральное число, меньшее n) из выбранных чисел не делилась на 3? Рассмотрите все возможные $n \geqslant 2$.

$\boxed{2 \cdot C_{675}^{2} + 2 \cdot C_{675}^{3} + 675^2 = 2 \cdot C_{676}^{3} + 675^2 = 102971025}$

2. Преследуя преступника, полицейский упустил его в одном из дворов. В этот двор был единственный вход, а также 3 подъезда, в любом из которых мог скрыться преступник. Известно, что

- если полицейский войдет в подъезд, в котором укрылся преступник, то гарантированно поймает его;
- если полицейский войдет в подъезд, где преступника нет, то с вероятностью $\dfrac{1}{6}$ тот убежит через выход из двора (и поймать его уже не удастся), с вероятностью $\dfrac{1}{2}$ преступник никуда не переместится, и с вероятностью $\dfrac{1}{3}$ спрячется в другом подъезде, где полицейского сейчас нет;
- не найдя преступника в подъезде, полицейский каждый раз выбирает другой подъезд для осмотра совершенно случайным образом.

С какой вероятностью полицейский поймает преступника? Перемещения между подъездами можно считать мгновенными.

$\boxed{\frac{17}{21} \approx 0{,}8}$

3. Даны две окружности Γ_1 и Γ_2, пересекающиеся в (несовпадающих) точках A, B. К этим окружностям проведены общие внешние касательные, пересекающиеся в точке X. Прямая XA повторно пересекает Γ_1 в точке T_1, а прямая XB повторно пересекает Γ_2 в точке T_2. Касательная к Γ_1 в точке T_1 и касательная к Γ_2 в точке T_2 пересекаются в точке Y.

Докажите, что точки X, Y, T_1, T_2 лежат на одной окружности.

4. Про положительные числа a, b, c известно, что $a+b+c = 1$, и каждое из них не превосходит $\dfrac{1}{2}$. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2\left(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}\right).$$

5. Петя и Вася разыгрывают призовой фонд, содержащий перед началом игры натуральное число M фунтиков. (Мы не знаем, что такое фунтики, но фунтики бесконечно делимы, например можно «отмерить» $1/\sqrt{2}$ фунтиков.) Петя знает секретное (целое) число фунтиков N (из диапазона $0 \leqslant N \leqslant M$), которое ему нужно для поездки в Иннополис, а Вася должен угадать это число N.

Игра состоит из раундов «Васина догадка — Петин ответ», которые продолжаются, пока Вася не назовет число N или пока не опустеет призовой фонд. В каждом раунде Вася называет целое число k (из диапазона $0 \leqslant k \leqslant M$) и

- если $k < N$, то Петя говорит об этом Васе, после чего игроки просто переходят к следующему раунду;
- если $k > N$, то Петя говорит об этом Васе, забирает из фонда $M/3$ фунтиков, и если в фонде еще остались фунтики, то игроки переходят к следующему раунду;
- если $k = N$, то Петя говорит об этом Васе, затем Вася получает из фонда $(x-n)$ фунтиков, где x — количество фунтиков в фонде на данный момент, а n — количество сыгранных раундов. Если $x \leqslant n$, то Вася получит 0 фунтиков.

Какое наибольшее число фунтиков может гарантировать себе Вася?

$\boxed{\frac{2M}{3} - \min\left\{y \mid \frac{y(y+1)}{2} \geqslant M\right\}}$

6. В правильном n-угольнике ($n \geqslant 3$) Коля, аналитик платформы «AllCups», решил сопоставить отрезкам между вершинами (т. е. сторонам и диагоналям) их важности, т. е. натуральные числа, удовлетворяющие условиям:

1. для любого треугольника с вершинами в вершинах данного n-угольника важности двух его сторон равны и превосходят важность третьей стороны;
2. важности всех отрезков должны образовывать отрезок натурального ряда, т. е. быть числами $1, 2, 3, \ldots, k$ без пропусков, но с повторениями.

Найдите максимальное возможное k.

$\boxed{n-1}$