

Олимпиада Innopolis Open по математике

10 класс, 2020 год

1. Пусть p — простое число. Решите уравнение $p^x = x^p$ в целых числах.
2. Найдите и докажите явное выражение (в терминах известных операций на целых числах) для функции $g(m, n)$, определенной для целых неотрицательных аргументов следующим образом:

$$g(m, n) = n, \text{ если } m = 0 \text{ то } n, \text{ иначе } g(m, n) = g(m - 1, m \times n).$$

$$g(m, n) = \begin{cases} n, & \text{если } m = 0; \\ g(m - 1, m \times n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

3. Есть 14 внешне одинаковых монет, среди которых одна — фальшивая, а все остальные — настоящие. Все настоящие монеты имеют одинаковый вес, а фальшивая — другой вес, отличный от настоящих монет. Кроме того, есть «гирька», равная по весу настоящей монете. Существует ли способ найти фальшивую монету за три взвешивания (взвешивая монеты и гирьку) на чашечных весах (без числовых делений)? А если такой способ существует, то опишите этот способ и ответе еще на один вопрос: существует ли способ за три взвешивания (взвешивая монеты и гирьку) на чашечных весах одновременно найти фальшивую монету и определить вес фальшивой монеты относительно настоящих монет (то есть определить, легче она или тяжелее настоящих)?
4. Нынешний год — високосный, то есть 29 февраля 2020 г. (29.02.2020) — реальная календарная дата. Вычислим следующие величины:

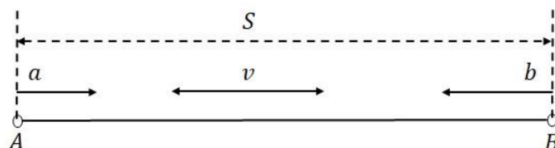
- $S_1 = 2051$ — сумма трёх чисел 2, 29 и 2020;
- $S_2 = 4081245$ — сумма квадратов этих чисел;
- $S_3 = 8242432397$ — сумма кубов этих же чисел.

Найдите все (вещественные) корни уравнения

$$6x^3 - 6S_1x^2 + 3(S_1^2 - S_2)x - S_1^3 - 2S_3 + 3S_1S_2 = 0.$$

5. Во время собеседования при приеме на работу в разных IT-компаниях любят задавать разные тестовые нестандартные задачи для проверки творческих способностей кандидата на работу. Одна из таких популярных тестовых задач следующая.

Точки A и B (см. рис.) движутся на встречу друг-другу (обычно говорят о двух «путниках») со скоростями a и b соответственно, а между ними все время «летает» со скоростью v ($v > a$ и $v > b$) еще одна точка (обычно говорят о «мухе», которая летает с носа одного путника на нос другого путника без задержек на носу ни одного из путников). Начальное расстояние между точками A и B равно S , Вопрос: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?



Так вот, в этой задаче вам сначала надо ответить на вопрос, сформулированный в тестовой задаче: какое расстояние пролетит точка-муха от момента начала движения точек-путников до момента их встречи?

Далее, вам надо ответить на следующий вопрос (и доказать ответ!): конечное или бесконечное число полетов между точкам-путниками совершит точка-муха от момента начала движения до момента встречи точек-путников?

И, наконец, вам надо ответить на еще один вопрос. Пусть в начальный момент точка-муха находилась в точке A ,

- W_1 — расстояние, которое пролетит точка-муха в первый раз от A до B , а W_2 — расстояние, которое пролетит точка-муха в первый раз от B до A ,
- ...
- W_{2k-1} — расстояние, которое пролетит точка-муха в k -ый раз от A до B , а W_{2k} — расстояние, которое пролетит точка-муха в k -ый раз от B до A ,
- ...

Так вот, в качестве ответа на третий вопрос вам надо привести (и обосновать) формулы для W_{2k-1} и W_{2k} (для $k \geq 1$).

6. Окружность — это, как известно, множество точек на плоскости, удаленных от заданной точки (центра) на фиксированное расстояние (радиус окружности), а число π — это отношение длины окружности к длине ее диаметра. В этом определении по умолчанию предполагают, что речь идет об Евклидовом расстоянии/длине, которая вычисляется на двумерной координатной плоскости (XOY) для отрезка с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) по формуле $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Однако, Евклидово определение длины — не единственно возможное. Например, так называемая равномерная длина отрезка с концами в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) вычисляется по формуле $\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$. Нарисуйте на координатной плоскости (XOY) равномерную окружность равномерного радиуса 1 с центром в начале координат. Чему равно отношение равномерной длины равномерной окружности к равномерной длине ее диаметра?