

Открытая олимпиада школьников по математике**10 класс, 2025 год**

1. Медиана пятёрки чисел — это среднее по величине из них, то есть если $a \leq b \leq c \leq d \leq e$, то медиана равна числу c . Последовательность a_n задана начальными условиями: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$. Каждый следующий член последовательности — это медиана пяти предыдущих, увеличенная на 1. Найдите a_{500} .

171

2. Натуральные числа a , b , c таковы, что

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 + \frac{16}{c},$$

причём все дроби несократимы. Найдите $|a - b|$.

4

3. В треугольнике ABC проведена высота AH . На стороне AB отмечена точка K . Оказалось, что $AK = 5$, $KB = 10$, $BH = 12$, $CH = 8$. Отрезки AH и CK пересекаются в точке M . Найдите синус угла $MВH$.

 $\frac{10}{\sqrt{17}}$

4. Положительные числа a_i и b_i таковы, что $\sum_{i=1}^n a_i = 25$, $\sum_{i=1}^n b_i = 4$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\sum_{i=1}^n \frac{(a_i + b_i)^3}{a_i b_i}$.

243,89

5. Дана трапеция $ABCD$, боковые стороны которой имеют длины $AB = 8$, $CD = 12$. Также известна длина диагонали $BD = 20$. Точка K на продолжении стороны AB за точку A такова, что $\angle BKD = \angle ADC$. Также оказалось, что AD — биссектриса $\angle BDK$. Точка L на луче DA такова, что $\angle LKA = \angle CBD$. Найдите длину DL .

30 или 16,128

6. На одной из клеток верхней строки клетчатого прямоугольника, стоит шахматный слон. Он начинает движение, за один ход перемещаясь на одну клетку по диагонали в одном и том же направлении. Достигнув клетки на стороне прямоугольника, слон меняет направление на 90° . Через n ходов слон впервые вернулся на исходную клетку, ни разу не попав в угол многоугольника. Возможно ли это?

Нет

7. На конференции по теории графов собралось много учёных. Они выяснили следующие вещи:

- 1) У каждого из них ровно 81 знакомых на конференции.
- 2) У любых двух знакомых ровно 60 общих знакомых на конференции.
- 3) У любых двух незнакомых ровно 54 общих знакомых на конференции.

Сколькими способами можно посадить за круглый стол четверых учёных так, чтобы справа и слева от каждого сидели его знакомые? (Порядок рассадки для данной четверки учёных важен и должен учитываться в ответе).

41731200

8. Обозначим за $d(n)$ число натуральных делителей числа n (включая единицу и само число). Найдите все такие n , что $n = 33 \cdot d(n)$.

792