

Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2024 год

1. Дан многочлен $P(x)$ степени 20. Известно, что у производной многочлена $P^2(x)$ ровно 30 различных вещественных корней. Какое наименьшее число различных вещественных корней может быть у многочлена $P(x)$?

71

2. Последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентным соотношением

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} - a_{n-3} + 3$$

и начальными условиями $a_0 = 0$, $a_2 = 2$. Можно ли по этим данным однозначно восстановить a_{4000} ? Если да, введите в поле для ответа это число, иначе введите слово «нет».

00086611

3. Натуральные делители натурального числа n занумеровали по возрастанию: $d_1 = 1, d_2, \dots, d_k = n$. Оказалось, что $d_{18} = 120$. Какое наибольшее значение может принимать число n ?

4920 = 120 · 41

4. Клетчатый куб $9 \times 9 \times 9$ состоит из ячеек, представляющих из себя единичные кубики. 361 ячейка закрашена. Докажите, что в каком-то кубике $2 \times 2 \times 2$ закрашено хотя бы четыре ячейки.

5. Произведение чисел a, b, c, d , не меньших 2, составляет 32. Найдите наибольшее значение выражения

$$\log_{cd} ab + \log_{bd} ac + \log_{bc} ad + \log_{ad} bc + \log_{ac} bd + \log_{ab} cd.$$

6,6

6. Окружности S_1 и S_2 находятся внутри трапеции $ABCD$, касаясь друг друга, оснований трапеции, и каждая — своей боковой стороны. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что радиус вписанной окружности треугольника BCK равен радиусу окружности S_1 и равен 5. Также известно, что $BC = 18$. Найдите площадь треугольника ADK .

392

7. Сфера S касается основания ABC тетраэдра $ABCD$ в точке H и проходит через вершину D . Рёбра AD , BD и CD эта сфера пересекает в точках A_1 , B_1 и C_1 . Центр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на отрезке DH . Радиус сферы S равен 12.

Пусть V — объём тетраэдра $ABCD$, а V_1 — объём тетраэдра $A_1B_1C_1D$. Какое наибольшее значение может принимать $V \cdot V_1$?

5308416

8. 100 человек пришли на представление в шляпах. Фокусник поменял местами их шляпы. После этого каждую минуту каждый человек находил свою шляпу и передавал тому, у кого эта шляпа в данный момент находилась, ту шляпу, которая в этот момент была у него самого.

(Если на каком-то шаге у человека A оказывается шляпа, принадлежащая человеку B , а у человека C оказывается шляпа, принадлежащая человеку самому A , то на следующем шаге у C оказывается шляпа, принадлежащая B).

Фокусник изначально раздал шляпы так, чтобы в итоге они вернулись к своим настоящим хозяевам, но при этом это произошло как можно позже. Через сколько минут, самое позднее, это может произойти в первый раз.

ЛЛНИИ 9