

Открытая олимпиада школьников по математике**9 класс, 2023 год**

1. Сумма двух различных натуральных делителей натурального числа n равна 100. Какое наименьшее значение может принимать число n ? (Среди указанных делителей могут быть единица и само число.)

2. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{|x-1| + |x-2| + |x-4| + \dots + |x-2^{19}|}$.

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ точка H на основании AD такова, что BH — высота. Оказалось, что $\angle bHC = \angle A$. Известно, что $AH = 5$, $CH = 6$. Найдите DH .

4. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что график трёхчлена $-f(x+2)$ касается графиков трёхчленов $f(x)$ и $f(-x)$. Найдите произведение корней трёхчлена $f(x)$.

5. Несколько Дедов Морозов участвуют в игре «Тайный Санта». Каждый Новый Год каждый Дед Мороз дарит подарок одному из своих коллег, причём одному и тому же каждый год, поскольку новую жеребьёвку им проводить лень. Кроме того, придумывать новые подарки Деда Морозы тоже лениятся, поэтому каждый год они просто передаривают подарок, полученный ими в прошлом Году.

Первого января 2023 года Дед Мороз Красный Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2019 года; Дед Мороз Синий Нос получил подарок, который сам дарил при наступлении 2017 года, а Дед Мороз Белый Нос получил подарок, который последний раз дарил при наступлении 2015 года.

Какое наименьшее число Дедов Морозов могло участвовать в игре?

6. Квадрат разбит двумя прямыми на 4 прямоугольника. Площади двух из них, имеющих только одну общую точку, равны 45. Площади остальных двух также целые и различные. Какое наименьшее значение может принимать площадь всего квадрата?

7. Клетчатая доска 9×9 вся заполнена фишками. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно выбрать горизонталь или вертикаль, на которой ещё остались фишки, и снять оттуда все оставшиеся фишки. Выигрывает игрок, после хода которого доска опустеет. Первым ходит Петя. Кто выигрывает при правильной игре?

8. Треугольник ABC вписан в окружность радиуса 4. На серединном перпендикуляре к стороне BC внутри треугольника отметили такую точку K , что $\angle KBC = \frac{\angle A}{2}$. Найдите расстояние между точкой K и точкой пересечения высот треугольника, если $\cos(\angle B - \angle C) = \frac{31}{32}$.