

Открытая олимпиада школьников по математике

5–7 классы, 2022 год

1. ABC — равносторонний треугольник со стороной 10. На стороне AB взята точка D , на стороне AC — точка E , на стороне BC — точки F и G такие, что треугольники ADE , BDG и CEF также равносторонние. $AD = 3$. Найдите FG .
2. Лиса Алиса загадала двузначное число, и сообщила Буратино, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Буратино узнал, что из этих пяти утверждений ровно два на самом деле неверны. Какие числа могла загадать лиса Алиса? В ответе укажите количество возможных вариантов.
3. Все жители острова либо блондины, либо брюнеты с зелёными или голубыми глазами. Доля брюнетов среди голубоглазых составляет 65%. Доля голубоглазых среди блондинов составляет 70%. И, наконец, доля блондинов среди зеленоглазых составляет 10%. Сколько процентов населения острова составляют зеленоглазые брюнеты?
4. Даны три числа: пятизначное, четырёхзначное и трёхзначное. Каждое из них состоит из одинаковых цифр (каждое — из своих). Может ли получиться так, что их сумма — пятизначное число, состоящее из пяти различных цифр?
5. В клетках таблицы 7×7 записаны попарно различные целые неотрицательные числа. Оказалось, что у любых двух чисел, находящихся в одной строке или одном столбце, отличаются неполные частные при делении на 8. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел в таблице?
6. На каждой из шести граней куба написали число. Потом на каждом из двенадцати рёбер написали сумму чисел на двух соседних с ним гранях. Можно ли зная эти 12 чисел на рёбрах однозначно восстановить числа на гранях?
7. Докажите, что сумма длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.
8. В Волшебной Стране 100 городов, некоторые города соединены между собой двусторонними авиалиниями. Между любыми двумя городами можно добраться, сделав не более 11 пересадок, причём единственным образом. Если из города A в город B нельзя добраться с 10 пересадками или менее, назовём их оба крайними. Какое наибольшее число крайних городов может быть в стране?