

# Открытая олимпиада школьников по математике

## 11 класс, 2022 год

1. Многочлен  $P(x)$  таков, что  $P(x^2)$  имеет  $2n + 1$  корней. Какое наименьшее количество корней может иметь производная многочлена  $P(x)$ ?

(В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности.)

2. Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел:  $a * b = a^{\ln b}$ . Найдите логарифм числа  $\frac{(ab)*(ab)}{(a*a)(b*b)}$  по основанию  $a * b$ .

3.  $4^{27000} - 82$  делится на  $3^n$ . Какое наибольшее натуральное значение может принимать  $n$ ?

4. Окружности  $O_1$  радиуса  $b$  и  $O_2$  радиуса  $c$  касаются в точке  $O$  — центре окружности  $O_3$  радиуса  $a$ . Точка  $A$  — одна из точек пересечения окружностей  $O_1$  и  $O_3$ . Окружность  $O_4$  касается окружности  $O_1$  в точке  $A$  и окружности  $O_2$  в точке  $B$ . Точка  $C$  — такая точка на прямой  $OB$ , что треугольники  $OAB$  и  $OCA$  подобны. Найдите  $AC$ .

Все указанные в условии касания происходят внешним образом.

5. Положительные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  таковы, что  $x + y + z = 5$ . Какое наименьшее значение может принимать величина  $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z$ ?

6. Дана четырёхугольная пирамида  $OABCD$ , в основании которой лежит параллелограмм  $ABCD$ . Плоскость  $\alpha$  пересекает ребра  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OD$  пирамиды в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  и  $D'$  соответственно. Известно, что  $\frac{OA'}{OA} = \frac{1}{a}$ ,  $\frac{OB'}{OB} = \frac{1}{b}$ ,  $\frac{OC'}{OC} = \frac{1}{c}$ . Найдите  $\frac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$ .

7. Дан правильный  $n$ -угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \frac{n}{4} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) + 1 - \frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$$

точек пересечения (не считая вершин).

Число  $n$  во всех вариантах задачи представляется в виде  $n = 4k + 2$ , где  $k$  натуральное число.

8. В таблице  $8 \times 8$  какие-то 23 клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?