

Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2020 год

1. Докажите, что число $3^{3n} + 17^{3n} + 31^{3n}$ при нечётном n раскладывается в произведение хотя бы четырёх (не обязательно различных) натуральных чисел, больших единицы.
2. График квадратного трёхчлена касается графика его производной. Докажите, что у трёхчлена нет корней.
3. На доске написаны четыре различных положительных числа. Известно, что это $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $y \neq \operatorname{ctg} x$, но неизвестно, в каком порядке. Всегда ли можно определить, где именно какое число?
4. $ABCD$ — пирамида с правильным треугольником ABC в основании. Сфера радиуса 10 с центром в точке D проходит через середины сторон AD , BD и CD и касается грани ABC . Найдите объём пирамиды.
5. На собрании присутствовали рыцари, всегда говорящие правду, и лжецы, которые всегда лгут (точно есть и те и другие). Каждый сказал: «Я знаком хотя бы с 15 рыцарями на этом собрании» и «Я знаком хотя бы с 11 лжецами на этом собрании». Какое наименьшее количество человек могло собраться?
6. В описанном пятиугольнике $ABCDE$ даны длины сторон $AB = 10$, $BC = 9$, $CD = 11$, $DE = 8$, $EA = 12$. Диагонали AC и BE пересекаются в точке M . Найдите отношение площадей треугольников AMD и BMD .
7. Куб $8 \times 8 \times 8$ состоит из 512 маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$ (назовём их ячейки). Ячейки называются соседними, если имеют общую грань — таким образом, у каждой ячейки не более 6 соседних.
В каждой ячейке записано неотрицательное число. Сумма чисел в ячейке и во всех соседних не менее 35. Докажите, что сумма чисел во всех ячейках куба строго больше 2560.
8. Последовательность x_n задана условиями $x_1 = \frac{5}{3}$ и $x_{n+1} = 4 - \frac{3}{x_n}$. Найдите x_{100} .