

**Открытая олимпиада школьников по математике****11 класс, 2019 год**

1. Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 13. Может ли их сумма квадратов также делиться на 13?
2. Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?
3. Последовательность  $\{a_n\}$  задана условиями  $a_1 = -1$  и  $a_{n+1} = \sum_{k=1}^n (a_k + 1)$  при  $n \geq 1$ . Найдите явную формулу этой последовательности.
4. Найдите  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ , если известно, что  $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{15}$ . Напомним, что  $\sec x = 1/\cos x$ , а  $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$ .
5. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $AB$  равна диагонали  $AC$ . На меньшей дуге  $AD$  описанной окружности треугольника  $ABD$  выбрана точка  $E$  так, что  $AB = AE$ . Найдите  $\angle CED$ .
6. Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице  $3 \times 3$  так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)
7. Плоскость пересекает рёбра тетраэдра  $ABCD$ , выходящие из вершины  $D$ , и делит их в отношении  $5 : 1$  (не обязательно от вершины  $D$ ). Также эта плоскость пересекает прямые  $AB$  и  $AC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите отношение площадей треугольников  $AEF$  и  $ABC$ .
8. Девочка Катя не любит число 239. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 239 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.