

Открытая олимпиада школьников по математике

9 класс, 2017 год

1. Согласно нормативам Международной Федерации Рофлинга, поле для рофлинга состоит из двух площадок, одна из которых квадратная, а вторая имеет ту же ширину, а длину — от 20 до 25 метров включительно. При этом все размеры должны составлять целое число метров, а общая площадь поля должна находиться в диапазоне от 200 до 240 квадратных метров (включительно). Найдите наибольший и наименьший возможные размеры квадратной площадки.
2. В карьере находилась куча из 20160000 песчинок. Грузовик за один рейс увозил из карьера количество песчинок, составляющее какую-то степень числа 8 (в том числе, возможно $8^0 = 1$). Мог ли он увести из карьера всю кучу песка ровно за 1000 рейсов?
3. На доске написано число 2017. Петя и Вася играют в следующую игру: за один ход можно вычесть из написанного на доске числа любой его натуральный делитель, кроме него самого, и записать результат этого вычитания на доске вместо исходного числа. Начинает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
4. Даны три приведённых квадратных трёхчлена с неотрицательными дискриминантами. Корень из дискриминанта каждого из них является корнем двух оставшихся трёхчленов. Докажите, что какие-то два из этих трёхчленов равны.
5. Докажите, что уравнение $53^x - 16^y = 91$ не имеет решения в натуральных числах.
6. Окружность пересекает стороны треугольника ABC в шести точках: AB в точках C_1 и C_2 , AC в точках B_1 и B_2 , BC в точках A_1 и A_2 , причём $AC_1 = BC_2 = \frac{1}{4}AB$, $CA_2 = BA_1 = \frac{1}{4}BC$, $AB_2 = CB_1 = \frac{1}{4}AC$. Докажите, что треугольник равносторонний.
7. Дан треугольник ABC , в котором $AB = 2$, $BC = 8$, $AC = 8$. Из точки B провели биссектрису, которая пересекла описанную окружность этого треугольника в точке D . Найдите, чему равно DI , где I — центр вписанной окружности треугольника ABC .
8. На рыцарском турнире каждый рыцарь подарил каждой своей знакомой даме столько цветов, сколько у неё знакомых рыцарей, кроме него. После этого каждый два рыцаря устроили столько поединков, сколько у них общих знакомых дам. Чего было больше: подаренных цветов или устроенных поединков и во сколько раз?