Открытая олимпиада школьников по математике

11 класс, 2016 год

1. Мальчик Вася выписал в тетрадку ненулевые коэффициенты многочлена $P(x)$ десятой степени. Затем у получившегося многочлена вычислил производную и выписал её ненулевые коэффициенты, и так далее, пока не получилась константа, которую он также выписал.

Какое наименьшее количество различных чисел у него могло получиться?

Коэффициенты выписываются с учётом знака, свободные члены также выписываются, если имеется одночлен вида $\pm x^n$, выписывается ± 1.

2. Решите уравнение или докажите, что оно не имеет решений: $3\sin x + 4\cos x = -5 - \frac{1}{|x|}$.

3. В некоторой стране 100 городов. Министерство авиации требует, чтобы каждые два города были соединены двусторонним авиарейсом ровно одной авиакомпании и чтобы рейсами каждой авиакомпании можно было бы добраться от любого города до любого (возможно, с пересадками). При каком наибольшем числе авиакомпаний это возможно?

4. Докажите, что при $n = 6002$ сумма биномиальных коэффициентов с шагом 6, т. е.

$$C_n^1 + C_n^7 + \ldots + C_n^{n-1},$$

дает остаток 1 при делении на 3

5. Три окружности, радиусов 1, 1 и $2\sqrt{\frac{13-6\sqrt{3}}{13}}$, расположены так, что треугольник, образованный центрами этих окружностей, является равносторонним со стороной $\sqrt{3}$. Найдите, чему равен радиус описанной вокруг треугольника, каждая из вершин которого является точкой пересечения двух из этих окружностей, дальней от центра третьей окружности.

6. Найдите суммарную длину промежутков на числовой оси, на которых выполняются неравенства $x < 1$ и $\sin\log_2 x < 0$.

7. Четыре из шести середин рёбер некоего тетраэдра образуют правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите рёбра исходного тетраэдра.

8. Докажите, что для положительных x, y, z выполняется неравенство

$$(x+y+z)(4x+y+2z)(2x+y+8z) \geqslant \frac{375}{2}xyz.$$