

## Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

## Математика, 11 класс, 2024 год

1. Функции  $f$  и  $g$  заданы формулами

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = bx + a,$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые натуральные числа, причём  $f(g(x)) - g(f(x)) = 2024$ . Чему могут быть равны числа  $a$  и  $b$ ?

Соответствие пары значений  $(a, b)$  таковы: (1013; 1012), (131; 123), (98; 87), (5; 6; 33)

2. Лес представляет собой координатную плоскость, в некоторых узлах которой растут ёлки. Всего ёлок больше миллиона. Докажите, что можно срубить более 100 000 ёлок так, чтобы расстояние между любыми двумя срубленными ёлками было больше 3. (Узлом называется точка, обе координаты которой целые; ёлки считаем точками.)

3. Прямая  $\ell$  касается описанной окружности треугольника  $ABC$  в точке  $A$ . Точки  $D$  и  $E$  таковы, что  $CD$  и  $BE$  перпендикулярны  $\ell$ , а углы  $DAC$  и  $EAB$  прямые. Докажите, что  $BD$  и  $CE$  пересекаются на высоте треугольника  $ABC$  из вершины  $A$ .

4. У Вити есть 9 альбомов с марками, причём в любых двух альбомах количество марок различается. Витя хочет отдать сестре один или два пустых альбома на её выбор. При этом Витя обнаружил, что, какой бы один или какие бы два альбома ни попросила сестра, марки из них можно распределить по остальным альбомам так, что во всех оставшихся семи или восьми альбомах станет поровну марок. Изначально у Вити меньше всего марок в красном альбоме. А какое минимальное количество марок может быть в синем альбоме?

78

5. Вредный учитель даёт ученикам тест из 12 вопросов, на каждый из которых надо ответить «да» или «нет». Учитель не только вредный, но и нечестный, поэтому «правильные» ответы он определяет только после того, как ученики сдадут работы. При этом он стремится выбрать «правильные» ответы так, чтобы ни один из учеников не угадал больше половины ответов. При каком наибольшем количестве учеников учитель гарантированно сумеет это сделать?

8

6. Докажите, что уравнение  $\frac{5m^2 - n}{n^2 + 3m} = 1$  имеет бесконечно много решений в целых числах.