

## Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

## Математика, 9 класс, 2023 год

1. Паша и Игорь подбрасывают монетку. Если выпадает орёл, выигрывает Паша, если решка — Игорь. В первый раз проигравший заплатил победителю 1 рубль, во второй — 2 рубля, потом — 4, и так далее (каждый раз проигравший платит в 2 раза больше, чем на прошлом шаге). После 12 игр Паша стал на 2023 рубля богаче, чем был изначально. Сколько из этих игр он выиграл?
2. Где-то в океане есть остров Невезения, на котором расположены несколько городов, соединённых между собой дорогами так, что случайный турист может попасть из любого города в любой другой. Оказалось, что если закрыть любые два города на карантин и перекрыть все ведущие в них дороги, то всё ещё можно проехать из любого из оставшихся городов в любой другой.  
Турист случайным образом выбрал три дороги, никакие две из которых не ведут в один город, и хочет проехать по ним, начав и закончив свой маршрут в одном и том же городе, по пути не заезжая ни в какой из городов дважды. Всегда ли он сможет это сделать?
3. Решите уравнение:  $[20x + 23] = 20 + 23x$ . Напомним, что  $[a]$  обозначает целую часть числа, то есть наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ .
4. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$  с прямым углом  $A$ . На катете  $AC$  отмечена точка  $D$  такая, что  $AD : DC = 1 : 3$ , после чего построены окружности  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  с центрами  $A$  и  $C$  соответственно, проходящие через точку  $D$ .  $\Gamma_2$  пересекает гипотенузу в точке  $E$ . Окружность  $\Gamma_3$  с центром  $B$  и радиусом  $BE$  пересекает  $\Gamma_1$  внутри треугольника в такой точке  $F$ , что угол  $AFB$  прямой. Найдите  $BC$ , если  $AB = 5$ .
5. Даны шесть карточек, на которых написаны цифры 1, 2, 4, 5, 8 и запятая. Из них составляются всевозможные числа (каждую карточку нужно использовать ровно один раз, запятая не может стоять в начале или в конце числа). Чему равно среднее арифметическое всех таких чисел?
6. На координатной плоскости отметили точки  $A(0,0)$  и  $B(1000,0)$ , а также точки  $C_1(1,1)$ ,  $C_2(2,1)$ ,  $\dots$ ,  $C_{999}(999,1)$ . Потом провели всевозможные прямые  $AC_i$  и  $BC_i$  ( $1 \leq i \leq 999$ ). Сколько целочисленных точек пересечения у всех этих прямых? (Целочисленная точка — это та, у которой обе координаты целые.)