

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 9 класс, 2022 год

1. В игре «Wordle» нужно за несколько попыток отгадать слово из 5 букв. В каждой попытке можно вводить пятибуквенное слово, и те его буквы, которые есть в загаданном слове, будут обведены одним из двух способов: в кружок, если стоят на своём месте, и в квадратик, если стоят не на своём месте. Буквы в загаданном слове могут повторяться.

1)	T	I	G	E	R
2)	L	I	F	T	S
3)	H	O	T	E	L

Паша сделал три попытки и получил результат, показанный справа. Сколько пятибуквенных последовательностей (не обязательно настоящих слов) удовлетворяют условиям? В английском алфавите 26 букв.

2. Какова максимально возможная площадь треугольника, две медианы которого равны m ?

3. Решите систему в целых числах:

$$\begin{cases} (y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1), \\ (x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1). \end{cases}$$

4. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ — все натуральные делители числа x . Назовём число x *n-четверным*, если $k = 4n$ и $a_1 + a_2 + a_3 = a_4$, $a_5 + a_6 + a_7 = a_8$, \dots , $a_{k-3} + a_{k-2} + a_{k-1} = a_k$. Докажите, что такое число существует для любого натурального n .

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из двух колод: такую же, как у первого, или состоящую только из синих карт. Какая из этих колод даст второму игроку большую вероятность выигрыша?

6. Клетки кубической таблицы $7 \times 7 \times 7$ (то есть маленькие кубики) пронумеровали по порядку числами от 1 до 343. (Сначала нумеруются клетки верхнего слоя: в первой строке слева направо от 1 до 7, в следующей от 8 до 14, и так далее до 49. Далее в таком же порядке нумеруются клетки второго слоя и т. д.) После этого из таблицы удалили несколько непересекающихся кубов $2 \times 2 \times 2$, а все оставшиеся числа сложили. Чему может равняться остаток от деления полученной суммы на 8?