

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 10 класс, 2022 год

1. В десятичной записи числа N все цифры различны и не равны нулю. Если выписать все числа, получаемые из N перестановкой цифр (в том числе само число N), и найти всевозможные разности этих чисел, то все разности окажутся различными. (Например, число $N = 123$ не удовлетворяет этому условию, так как $132 - 123 = 321 - 312$.) Найдите самое большое такое N .

2. Внутри квадрата $ABCD$ отмечена точка M . Для каждого из углов каждого из треугольников MAB , MBC , MCD , MDA найдено его отличие от прямого угла (неотрицательное; например, для угла 70° отличие составляет 20° , а для угла 130° оно равно 40°). Какое максимальное значение может принимать минимальное из этих отличий?

3. Пусть $a_1 + \dots + a_m = n$, где a_1, \dots, a_m — натуральные числа. Докажите, что $n!$ делится на произведение $a_1! \cdot a_2! \cdot \dots \cdot a_m!$.

4. Даны три различных положительных числа a, b, c , причём $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) > 0$. Докажите, что

$$\frac{(a^2 + b^2 - c^2)^2}{4b^2} > \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{4} - \frac{c^2}{2}.$$

5. Двое играют в карточную игру. У каждого есть колода из 30 карт. Каждая карта красная, зелёная или синяя. По правилам красная карта сильнее зелёной, зелёная сильнее синей, а синяя сильнее красной. Карты одного цвета равны. Колода каждого игрока перед началом партии перемешивается и кладётся перед ним рубашкой вверх. После этого оба открывают по верхней карте своей колоды. Если карты разного цвета, то выигрывает тот, чья карта сильнее. Если карты одинаковые, то они уходят в сброс, а игроки открывают ещё по одной карте — и так до тех пор, пока карты не окажутся различными. Если же обе колоды кончились, а победитель не выявлен, объявляется ничья.

Известно, что у первого игрока в колоде по 10 карт каждого цвета. Второй игрок имеет право выбрать одну из трёх колод:

- а) такую же, как у первого;
- б) состоящую только из синих карт;
- в) состоящую из 15 синих и 15 зелёных карт.

Какая из этих колод даст второму игроку большую вероятность выигрыша?

6. На координатной плоскости нарисованы 2022 параболы, заданные уравнениями

$$f_i(x) = x^2 + b_i x$$

($1 \leq i \leq 2022$). Существует ли такая точка M и такая прямая l , что сумма расстояний от вершин всех парабол до точки M равна сумме расстояний от вершин всех парабол до прямой l ?