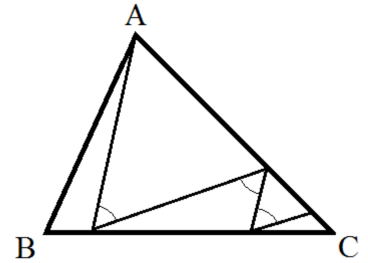


Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»

Математика, 11 класс, 2019 год

1. Муха сидит в вершине A треугольной комнаты ABC ($\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = 5$ м). В какой-то момент она вылетает оттуда в произвольном прямом направлении, после чего каждый раз, долетая до стены, поворачивает на 60° и продолжает лететь по прямой (см. рис.). Может ли оказаться, что через какое-то время муха пролетела больше 12 метров?



2. Предприятие в течение года производит некий товар в количестве x_1 за январь, x_2 за февраль, ..., x_{12} за декабрь. Среднее производство товара с начала года вычисляется так:

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{x}_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \dots, \quad \bar{x}_{12} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{12}}{12}.$$

Известно, что $\bar{x}_k < x_k$ при k от 2 до 6 и $\bar{x}_k > x_k$ при k от 7 до 12. В каком месяце среднее производство товара с начала года было наибольшим?

3. Встретились N детей. Некоторые из них подарили некоторым другим подарок (один другому не мог подарить больше одного подарка). Получилось, что все получили поровну подарков, хотя дарили все разное количество (в том числе, возможно, кто-то ничего не дарил). При каких $N > 1$ это возможно?

4. На плоскости отмечены пять точек, любые три из которых образуют треугольник площади не меньше 2. Докажите, что найдутся 3 точки, образующие треугольник площади не меньше 3.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106, \\ yz + 3y = z + 39, \\ zx + 3x = 2z + 438. \end{cases}$$