

Олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
Математика, 9 класс, 2016 год

1. Найдите все такие числа k , для которых

$$(k/2)!(k/4) = 2016 + k^2.$$

Знаком $n!$ обозначен факториал числа n , то есть произведение всех целых чисел от 1 до n включительно (определён только для целых неотрицательных чисел; $0! = 1$).

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно, причём $AM = AN$. Отрезки CM и BN пересекаются в точке O , причём $BO = CO$. Докажите, что ABC равнобедренный.

3. Пятизначное число нравится Лидии, если ни одна из цифр в его записи не делится на 3. Найдите общую сумму цифр всех пятизначных чисел, которые нравятся Лидии.

4. На координатной плоскости нарисовали равнобедренный треугольник ABC : $AB = 2016$, $BC = AC = 1533$, причём вершины A и B лежат в узлах на одной горизонтали. Определите, сколько узлов лежит в треугольнике ABC (включая узлы, лежащие на сторонах). Узлом называется точка координатной плоскости, у которой обе координаты целые.

5. На плоскости расположено 100 прямоугольников, стороны которых параллельны координатным осям. Каждый пересекается хотя бы с 90 другими. Докажите, что найдётся прямоугольник, пересекающийся со всеми.