

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2024/25 год, третий отборочный тур

1. Скоростное шоссе, по которому можно ехать со скоростью 150 км/ч, идет параллельно обычному, по которому можно ехать со скоростью 100 км/ч. Проехать 1 км по скоростному шоссе стоит 3 рубля, а по обычному — 1 рубль. Мише надо проехать из Ёлкина в Палкино, до которого 100 км. У него есть 250 рублей. За какое наименьшее время он может добраться до Палкина? Считаем, что разгон, торможение и переход с одного шоссе на другое происходят мгновенно.
2. Сумма двадцати чисел равна 0. Докажите, что можно покрасить десять из них в красный цвет, а какие-то девять из оставшихся — в синий так, что сумма девяти синих чисел будет не меньше, чем сумма десяти красных.
3. При каких n , больших 2, можно расставить в клетках таблицы размером $n \times n$ крестики и нолики (в каждой клетке — один знак) так, чтобы в каждом столбце таблицы, кроме одного, крестиков было больше, чем ноликов, а в каждой строке таблицы, кроме одной, ноликов было больше, чем крестиков?
4. Есть две кучки по 11 монет в каждой. Известно, что в каждой кучке 10 настоящих монет и одна фальшивая, которая легче настоящей. Все настоящие монеты весят одинаково, обе фальшивые — тоже. Можно ли за **одно** взвешивание на чашечных весах гарантированно найти не менее 8 настоящих монет?
5. Сторона BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ видна из середины M его стороны AD под углом 90° . Биссектрисы треугольника BMC пересекаются в точке I . Известно, что

$$\angle ABM = \angle MIC \quad \text{и} \quad \angle BIM = \angle MCD.$$

Докажите, что $AI = DI$.