

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

2024/25 год, второй отборочный тур

1. Сегодня у меня и моей сестры день рождения. Вместе нам 26 лет, причем сестре в три раза меньше лет, чем мне будет тогда, когда нам вместе будет в пять раз больше лет, чем мне сейчас. Сколько сейчас лет моей сестре?

2. Три биссектрисы неравностороннего треугольника пересекаются в точке I . Докажите, что каждое из расстояний от точки I до вершин треугольника меньше длины средней по величине стороны треугольника.

3. В каждой клетке шахматной доски стоит нуль. Петя и Вася играют в игру. Ходят по очереди, начинает Петя. Петя каждым своим ходом выбирает какой-то квадрат из четырех клеток и к каждому из чисел, стоящих в этом квадрате, прибавляет нуль или единицу, по своему выбору (выбор для каждой из четырех клеток совершается отдельно, то есть может случиться, что в некоторых клетках прибавляется нуль, а в некоторых — единица). Вася своим ходом выбирает какую-то клетку и прибавляет к стоящему в ней числу нуль или единицу, по своему выбору. Петя хочет, чтобы после 2024-го хода (т. е., после того как он и Вася сделают по 1012 ходов) на доске было как можно больше нечетных чисел. Какое наибольшее количество нечетных чисел он может получить независимо от действий Васи?

4. Целые числа x, y, z, t таковы, что

$$x + y + z + t = 0.$$

Сколько различных натуральных значений, не превосходящих 10 000, может принимать число

$$(xy - zt)(xz - yt)(yz - xt)?$$

5. Числа от 1 до 1 000 000 разбили на 100 000 десятков (то есть групп от $10a + 1$ до $10a + 10$) и в каждом десятке покрасили одно число в красный цвет, а другое в зелёный. Докажите, что можно выбрать несколько (не более 50) красных чисел и столько же зелёных чисел так, чтобы сумма выбранных красных чисел была равна сумме выбранных зелёных.