

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2023/24 год

Первый день

1. Можно ли вписать в клетки таблицы 3×3 различные натуральные числа так, чтобы как в любой строке, так и в любом столбце у записанных там трех чисел произведение делилось на 2024, а сумма была меньше 100?
2. На доске написано 100 чисел. Оказалось, что произведение любых двух написанных чисел равно сумме всех остальных. Чему может быть равна сумма всех написанных чисел?
3. Точка E — середина диагонали BD трапеции $ABCD$. На основании AD отмечена такая точка F , что $\angle AFE = \angle BAD$. Точка K симметрична точке B относительно F . Докажите, что $AC + CE \geq EK$.
4. Дано натуральное число k . Из натуральных чисел, не превосходящих $12k^3$, выбраны $6k + 20$ чисел. Докажите, что из них можно выбрать две непересекающиеся шестерки чисел с равными суммами.

Второй день

5. Звезда состоит из 100 горючих шнуров OA_1, \dots, OA_{100} , соединенных в единственной точке O . Время горения каждого шнура не зависит от того, с какого конца его поджигают, а скорость горения не обязана быть постоянной. Если поджечь звезду в точке A_1 , она полностью сгорит за 201 секунду, если в точке A_2 — за 202 секунды, \dots , если в точке A_{99} — за 299 секунд. За какое время звезда полностью сгорит, если ее поджечь в точке A_{100} ?
6. Существует ли такое натуральное число n , что неполные частные от деления n на все натуральные числа от 10 до 1000 включительно — это различные нечетные простые числа, а остатки — составные числа (не обязательно различные)? Напомним, что 0 не является составным числом.
7. У ювелира есть 100 золотых монет. Покупатель знает лишь, что веса этих монет равны 1, 2, \dots , 100 г в каком-то порядке, а ювелир знает, какая сколько весит. Как ювелиру за два взвешивания на чашечных весах без гирь доказать покупателю, что известная ювелиру однограммовая монета действительно весит 1 г, но при этом не дать покупателю возможности определить вес никакой другой монеты?
8. На плоскости отмечено n точек. Если провести серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему любые две отмеченные точки, то с одной стороны от него лежит одна отмеченная точка, а с другой стороны от него — $n - 1$ отмеченная точка (на самом серединном перпендикуляре отмеченных точек нет). Каково наибольшее возможное значение n ?